HEINRICH-HERTZ-INSTITUT - BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 183

Einführung in die Theorie des ionosphärischen Reflexionsfaktors für Langwellen

von

Dr. rer. nat. J. Frisius

Berlin

1 9 7 4

EINSTEINUFER 37 1000 BERLIN 10

Technischer Bericht Nr. 183

Einführung in die Theorie des ionosphärischen Reflexionsfaktors für Langwellen

Zusammenfassung:

Nach einer eingehenden Erläuterung des Begriffes der ebenen, inhomogenen Welle sowie des Wellenpaares wird die Theorie des Reflexionfaktors zunächst für isotrope, dann für anisotrope Modelle der tiefen Ionosphäre entwickelt. Anhand homogener, isotroper Modelle wird der Zusammenhang zwischen der Oberflächen-Admittanz bzw. -Impedanz und der Einfallswinkel-Abhängigkeit des Reflexionsfaktors diskutiert. Die hierbei entwickelte Formulierung wird auf die Reflexionsfaktorberechnung für isotrope, inhomogene Modelle angewendet, wobei für die numerische Berechnung der Oberflächenadmittanz bzw. -Impedanz an der Ionosphären-Untergrenze drei verschiedene Verfahren beschrieben werden. Nach ausführlicher Diskussion der Ausbreitungsmoden ebener Wellen im homogenen, anisotropen Plasma werden die zuvor eingeführten Begriffe anhand homogener, anisotroper Ionosphärenmodelle erweitert. Anstelle der Oberflächen-Admittanz bzw. -Impedanz tritt die sog. "L-Matrix", anstelle des Reflexionsfaktors die Reflexionsmatrix, in der Reflexions- und Konversionsfaktoren vereinigt sind. Zur Berechnung der L-Matrix an der Untergrenze anisotroper, inhomogener Ionosphärenmodelle werden, in enger Analogie zur Berechnung isotroper Modelle, drei numerische Verfahren beschrieben. Abschließend wird anhand gerechneter Beispiele der Einfluß des geomagnetischen Ortes, der Ausbreitungsrichtung, der Frequenz sowie verschiedener Parameter aeronomischer Ionosphärenmodelle auf die Elemente der Reflexionsmatrix aufgezeigt.

Abstract:

After an introduction of the concept of solving Maxwell's equations in homogeneous media by pairs of plane, inhomogeneous Waves, the theory of the reflection coefficient is developed, first for isotropic, then for anisotropic models of the lower ionosphere. For homogeneous, isotropic models it is shown that the surface-admittance or -impedance respectively plays an important role for understanding the relation between the reflection coefficient and the angle of incidence. For numerically computing this quantity for the lower boundary of inhomogeneous, isotropic models , three different methods are described. After discussion of the propagation modes of plane waves in the anisotropic plasma, the previously introduced concepts are generalized, first for homogeneous, anisotropic models. The surface-admittance or -impedance is replaced by the so called "L-Matrix", the reflection coefficient by the reflection matrix which combines reflection- and conversion-coefficients. For numerically computing the L-Matrix of the lower boundary of anisotropic, inhomogeneous models, again three methods are described in close analogy to the computation for isotropic models. Finally, numerical exemples are given showing the influence of the geomagnetic latitude, the propagation azimuth, the frequency and of different parameters of aeronomic models of the lower ionosphere upon the reflection matrix elements.

H e i n r i c h - H e r t z - I n s t i t u t

Der Bearbeiter:

J. Frisius

(Dr. rer. nat. J. Frisius)

Der Abteilungsleiter:

Gundlach

(Prof. Dr. F. W. Gundlach)

Der Geschäftsführer:

H. Ohnsorge

(Dr. ing. H. Ohnsorge)

Berlin, den 30. Dezember 1974

Einführung in die Theorie des ionosphärischen Reflexionsfaktors für Langwellen

Vorwort

Experimentelle und theoretische Arbeiten auf dem Gebiet der Längstwellenausbreitung bilden seit nunmehr über 15 Jahren einen wichtigen Bestandteil der Forschungsarbeiten in der Abteilung Hochfrequenztechnik des Heinrich-Hertz-Instituts. In den frühen sechziger Jahren konnten weithin beachtete Beiträge zur Interpretation von Feldstärke- und Phasenmessungen mit Hilfe aeronomischer Modelle der tiefen Ionosphäre geleistet werden. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Arbeiten wurde in einer Monographie von Volland (1968) vorgelegt. Späterhin verlagerte sich das Interesse von der Ausbreitungstheorie zur praktischen Anwendung der Längstwellen-Meßtechnik bei der globalen Lokalisierung von Gewitterzentren auf Grund von Atmospherics-Beobachtungen (Heydt et al., 1967, Harth, 1973). Als weiteres Arbeitsgebiet ergab sich aus der Zusammenarbeit mit Meteorologen die Nahblitz-Lokalisierung mit Hilfe von Einfallsrichtungs- und Phasenmessungen im Bereich extrem niedriger Frequenzen (Heydt, 1974). Daneben wurden jedoch auch reine Ausbreitungsmessungen weitergeführt, um neue Beobachtungsgrößen erweitert und technisch den Erfordernissen der elektronischen Datenverarbeitung angepaßt (Frisius, Heydt und Raupach, 1971).

Angesichts dieser Erweiterung und Vervollkommnung des verfügbaren Beobachtungsmaterials erwies sich eine Neubesinnung auf die theoretische Grundlagenarbeit der früheren Jahre als notwendig. Die Frage nach den Einflüssen verschiedenener aeronomischer Parameter auf die Ausbreitung in verschiedenen Frequenzbereichen bedarf vollständigerer Antworten, als sie dem Schrifttum zu entnehmen sind, obwohl die Literatur zu diesem Thema einen inzwischen schwer überschaubaren Umfang angenommen hat. Das gilt insbesondere für das verbindende Glied zwischen der Aeronomie und der Wellenausbreitung, nämlich die Theorie des ionosphärischen Reflexionsfaktors. Die Verständnisschwierigkeiten, die sich dem Eindringen in diese spezielle Materie erfahrungsgemäß immer wieder entgegenstellen, gaben den Anlaß zur Niederschrift dieses Manuskriptes.

Rein formal gesehen handelt es sich bei der Reflexionsfaktorberechnung um die Integration eines Differentialgleichungssystems, das sich in wenigen Zeilen ableiten läßt. Diese Behandlung des Problems nimmt im vorliegenden Manuskript nur einige Seiten des letzten Kapitels in Anspruch. Sie läßt jedoch das Bedürfnis des Naturwissenschaftlers, die Ergebnisse seiner Berechnungen physikalisch interpretieren zu können, weitgehend außer acht. Darum liegt das Schwergewicht dieser Darstellung auf der physikalisch-anschaulichen Begründung einiger ausgewählter Verfahren der Reflexionsfaktor-Berechnung.

Den Ausgangspunkt dieser Darstellung bildet die Einführung des physikalischen Grundbegriffes der ebenen, inhomogenen Welle. Das Verständnis dieses Begriffes wird dem Anfänger dadurch erschwert, daß hierfür zwei verschiedene formale Beschreibungen in der Literatur nebeneinander verwendet werden: Zum einen durch einen komplexen Wellenvektor, zum anderen mit Hilfe einer komplexen Brechzahl und eines (i.A. ebenfalls komplexen) Wellennormalvektors. Beide Konzepte werden eingehend dargestellt. Der Wellennormalvektor wird durch Einführung zweier weiterer Einheitsvektoren zu einem rechtshändigen, welleneigenen Koordinatensystem ergänzt. Solche Systeme dienen dazu, den aus den Maxwell-Gleichungen folgenden Verknüpfungen zwischen dem Wellennormalvektor, den Feldvektoren und den Materialeigenschaften die einfachstmögliche Form zu geben. Außerdem sind sie unentbehrlich, um die Polarisationen des E- und H-Vektors, die vor allem in der Ionosphäre eine so wichtige Rolle spielen, definieren und berechnen zu können. Im isotropen Medium kann man eine der Koordinatenebenen des welleneigenen Systems mit der Ausbreitungsebene zusammenfallen lassen. In der Ionosphäre dagegen wird eine "Bezugsebene" des welleneigenen Koordinatensystems durch den Wellennormalvektor und durch die Richtung des Erdmagnetfeldes bestimmt.

Ein nächster Schritt besteht in der Zusammenfassung auf- und abwärts laufender Wellen zu "Wellenpaaren". Mit diesem Begriff wird eine Analogie zu Strom- und Spannungsverteilungen auf homogenen Leitungsstücken eingeführt. Da der gesuchte Reflexionsfaktor ein Verhältnis zwischen charakteristischen Amplitudenwerten auf- und absteigender Wellen ist, wäre es überflüssiger Aufwand, diese Amplituden einzeln zu berechnen. Um das zu vermeiden, werden auch die Randbedingungen mit Hilfe von Verhältnissen zwischen horizontalen Vektorkoordinaten formuliert. Diese Verhältnisse können als Analogie zu Widerständen bzw. Leitwerten in der Lei-

tungstheorie verstanden werden. Durch geeignete Auswahl der horizontalen Vektorkoordinaten, charakteristischen Amplituden und ihrer Anordnung in Spaltenschreibweise wird eine einheitliche Darstellungsweise erreicht, die sowohl den einfachsten Fall der Reflexion an isotropen homogenen Ionosphärenmodellen als auch den kompliziertesten anisotroper, inhomogener Ionosphärenmodelle umfaßt.

Einige Bemerkungen zur Nomenklatur erscheinen angebracht. Es wurde versucht, Bedeutungsüberschneidungen zuvermeiden, die innere Einheit der Gedankenführung auch äußerlich sichtbar werden zu lassen und hierbei möglichst wenig gegen die DIN-Normen und die Gebräuche in der einschlägigen Literatur zu verstoßen. In folgenden Einzelheiten weicht das Manuskript vom Gewohnten ab: (vgl. das am Ende der Arbeit angefügte Nomenklaturverzeichnis)

1. Wegen des notorischen Mangels an Buchstaben werden teilweise sehr ausführliche Indizes benutzt, vor allem für seltener auftauchende Größen.
2. Aus dem gleichen Grunde wurden für die welleneigenen Koordinatensysteme bildhafte Symbole als Indizes gewählt: Der Index $\blacklozenge$ wurde für den Wellennormalvektor gewählt, die Indizes $\perp$ und $\dashv$ haben die Bedeutung "senkrecht zur Bezugsebene", die Indizes " und = "parallel zur Bezugsebene und senkrecht zum Wellennormalvektor". Die Zeichen $\circlearrowleft$ und $\circlearrowright$ bedeuten "linkszirkular" bzw. "rechtszirkular", mit den (hochgestellten) Zeichen $\uparrow$ und $\downarrow$ werden auf- bzw. abwärtslaufende Wellen bezeichnet. Die Koordinatensymbole x, y und z ändern im ganzen Text nirgends ihre durch die Erdoberfläche und die Ausbreitungsrichtung vorgegebene Bedeutung.
3. Es wurde zwischen Vektoren einerseits, Spalten und Zeilen andererseits ausdrücklich unterschieden. Die Gründe dafür sind an anderer Stelle ausführlich dargelegt (Frisius, 1973). Der Gebrauch des ungewöhnlichen Zeichens $\mathfrak{1}$ für den Einheitsvektor möge damit entschuldigt werden, daß es sich ungemein bequem auf der Schreibmaschine tippen läßt und schlechterdings keinerlei Verwechselung zuläßt.
4. Komplexe Zahlen werden nur da besonders kenntlich gemacht, wo es der textliche Zusammenhang erfordert oder wo Verwechselungsmöglichkeiten ausgeschlossen werden müssen. Hier muß entschuldigend auf eine Inkonsequenz hingewiesen werden: Zum Teil wird ein hochgestellter Index ^{c} verwendet (insbesondere für die komplexe Brechzahl und für die - durch die Vakuumwellenzahl k_0 geteilte - z-Koordinate des komplexen Wellenvektors), für einige andere Größen hingegen die durch die DIN-Norm festgelegte Unterstreichung (insbesondere für die kartesischen Koordinaten des Wellenvektors). Der Grund hierfür war die ursprüngliche Absicht, die Unterstreichung zum Symbolisieren von Spalten und Zeilen zu verwenden, was für ein Maschinenskript sehr bequem und in englischsprachigen Texten weit verbreitet ist. Die nachträgliche vollständige Umstellung des Textes hätte nur mit untragbarem Zeitaufwand für das Neutippen zahlreicher Formeln bewerkstelligt werden können.
5. Die Symbole für Vektorkoordinaten, Verhältnisse zwischen Vektorkoordinaten, und für Elemente von Transformationsmatrizen wurden von vornherein so gewählt, daß der Übergang von der isotropen zur anisotropen Ausbreitung formal durch einfachen Austausch gegen entsprechende Spalten- und Matrizensymbole dargestellt werden kann.

Dieses Manuskript entstand im Laufe der Vorbereitung von Programmierarbeiten, die das Ziel haben, ein breites Spektrum aeronomisch - geophysikalischer Einflüsse auf den Reflexionsfaktor am Rechner "durchzuspielen" (Frisius, 1974). Diese Arbeiten wurden ermöglicht durch finanzielle Zuwendungen teils aus Mitteln des ERP-Sondervermögens, teils durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft. Die relativ rasche Abwicklung der Programmier- und Test-Arbeiten ist dem Zugang zum Großrechenzentrum für die Wissenschaft in Berlin zu verdanken.

1. Grundgleichungen

1.1 Allgemeine Form

Die Zusammenhänge zwischen den Vektoren elektrische Feldstärke $\vec{E}$, magnetische Feldstärke $\vec{H}$, Dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ und magnetische Kraftflußdichte $\vec{B}$ schreiben wir in folgender maßsystemfreier Form (Hund, 1957):

$$\mathrm{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{\varkappa_o}\left(\frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{J}_q\right) \qquad \mathrm{rot}(\vec{E}) = \frac{-1}{\varkappa_o}\frac{d\vec{B}}{dt} \qquad (1a,b)$$

Die Maßsystemkonstante $\varkappa_o$ ist im praktischen Maßsystem gleich eins, im cgs-System $\frac{c}{4\pi}$ (c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum). Mit $\vec{J}_q$ bezeichnen wir den Vektor der Leitungsstromdichte, das - hier als Index gesetzte - Symbol q steht für elektrische Ladung. Mit der räumlichen Verteilungsdichte ϱ_q elektrischer Ladung hängt $\vec{J}_q$ über den Ladungserhaltungssatz zusammen:

$$\mathrm{div}(\vec{J}_q) = -\frac{d\varrho_q}{dt} \qquad (2)$$

Der Zusammenhang zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ sowie zwischen $\vec{B}$ und $\vec{H}$ lautet

$$\vec{D} = \epsilon_o\vec{E} + \vec{P}_\epsilon \qquad \vec{B} = \mu_o\vec{H} + \vec{P}_\mu \qquad (3)$$

Hierin sind $\vec{P}_\epsilon$ bzw. $\vec{P}_\mu$ die Vektoren der dielektrischen bzw. magnetischen Polarisationsdichte.
Während durch $\vec{J}_q$ die Bewegung freier Ladungsträger beschrieben wird, erfaßt $\vec{P}_\epsilon$ die Verschiebung elastisch gebundener Ladungsträger gegen ihre Ruhelage.

Zwischen den Maßsystemkonstanten ϵ_o, μ_o und $\varkappa_o$ besteht in allen Maßsystemen der Zusammenhang

$$c^2 = \frac{\varkappa_o^2}{\epsilon_o\,\mu_o}$$

Im cgs-System sind ϵ_o und μ_o gleich $1/4\pi$, im praktischen Maßsystem ist festgelegt

$$\mu_o = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,sec}}{\mathrm{A\,m}} \quad , \quad \epsilon_o = \frac{\varkappa_o^2}{\mu_o\,c^2} = \frac{10^{-9}}{36\,\pi}\,\frac{\mathrm{A\,sec}}{\mathrm{V\,m}}$$

Die maßsystemfreie Schreibweise erleichtert den Übergang zwischen dem praktischen und dem cgs-System und damit das Studium älteren Schrifttums. Hierbei ist allerdings noch zu beachten, daß im cgs-System anstelle der Vektoren $\vec{D}$ und $\vec{B}$ durchweg die Vektoren

$$\vec{D}_{cgs} = \frac{1}{\epsilon_o}\vec{D} \qquad \text{und} \qquad \vec{B}_{cgs} = \frac{1}{\mu_o}\vec{B}$$

verwendet werden.

Im isotropen Medium sind $\vec{P}_\epsilon$ und $\vec{E}$ sowie $\vec{P}_\mu$ und $\vec{H}$ einander parallel, die Zusammenhänge (3) können mit Hilfe der Materialkonstanten Dielektrizitätskonstante ϵ und Induktionskonstante μ geschrieben werden:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_r\epsilon_o\vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_r\mu_o\vec{H} \qquad (3a)$$

Die physikalisch dimensionslosen Konstanten $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_o$ und $\mu_r = \mu/\mu_o$ bezeichnen wir als "relative Dielektrizitätskonstante" bzw. "relative Induktionskonstante". In allen im folgenden behandelten Situationen ist $\mu_r = 1$. An die Stelle von ϵ_r tritt in anisotropen Medien die Matrix eines Tensors.

In isotropen Medien sind auch die Vektoren $\vec{E}$ und $\vec{J}_q$ einander Parallel, der Zusammenhang zwischen beiden wird durch die skalare Leitfähigkeit σ_q vermittelt

$$\vec{J}_q = \sigma_q\vec{E} \qquad (4)$$

welche im anisotropen Medium ebenfalls durch einen Tensor zu ersetzen ist.

Die mit der ortsabhängigen Dichte ϱ_q über den Raum verteilten Ladungen bilden die Quellen des Vektorfeldes $\vec{D}$, das Vektorfeld $\vec{B}$ ist quellenfrei :

$$\mathrm{div}(\vec{D}) = \varrho_q \quad , \quad \mathrm{div}(\vec{B}) = 0 \qquad (5a,b)$$

In einem leitenden Medium wird jede Ladungsanhäufung innerhalb eines begrenzten Teilvolumens binnen kurzer Zeit durch Leitungsströme über den gesamten Raum verteilt. Die für diesen Ausgleichsvorgang typische Zeitkonstante ist die "Relaxationszeit":

$$\tau_{rel} = \frac{\epsilon}{\sigma_q}$$

Ist τ_{rel} klein im Vergleich zu den durch unsere spezielle physikalische Aufgabestellung vorgegebenen Zeitspannen (Anstiegszeiten, Schwingungsdauern etc.), so darf die Gleichung (5a) durch die Annahme $\varrho_q = 0$ vereinfacht werden, was bei der theoretischen Behandlung der Wellenausbreitung durchweg stillschweigend vorausgesetzt wird.

1.2 Zeitfreie Form

Wegen der Linearität der Grundgleichungen kann ein beliebig von der Zeit abhängiges Feld aus harmonisch schwingenden Teilfeldern zusammengesetzt werden.

Wird die Zeitabhängigkeit eines solchen Teilfeldes durch den Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ erfaßt, so vereinfachen sich die Grundgleichungen dadurch, daß der zeitliche Differentialoperator $\frac{d}{dt}$ durch den Faktor $j\omega$ ersetzt werden kann.

Sind keinerlei zeitlich konstante Feldanteile zu berücksichtigen, so verschwindet der formale Unterschied zwischen der Leitungsstromdichte $\vec{J}_q$ und der zeitlichen Ableitung der dielektrischen Polarisation $\vec{P}_\epsilon$. Damit erhalten die Grundgleichungen 1a und 1b die Form

$$\mathrm{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{\varkappa_o} j\omega\,(\epsilon_o\vec{E} + \vec{P}_\epsilon) = \frac{1}{\varkappa_o}(j\omega\epsilon_o\vec{E} + \vec{J}_q) \quad , \quad \mathrm{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{\varkappa_o} j\omega\mu_r\mu_o\vec{H}$$

In isotropen Medien kann der Zusammenhang zwischen $\mathrm{rot}(\vec{H})$ und $\vec{E}$ ausgedrückt werden

entweder durch eine komplexe Leitfähigkeit σ_q^c :

$$\mathrm{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{\varkappa_o}(j\omega\epsilon_r\epsilon_o + \sigma_q)\vec{E} = \frac{1}{\varkappa_o}\sigma_q^c\vec{E}$$

oder durch eine komplexe Dielektrizitätskonstante ϵ_r^c :

$$\mathrm{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{\varkappa_o} j\omega\epsilon_o(\epsilon_r + \frac{\sigma_q}{j\omega\epsilon_o})\vec{E} = \frac{1}{\varkappa_o} j\omega\epsilon_o\epsilon_r^c\vec{E}$$

In der Ionosphärenphysik überwiegt die zweite Schreibweise, der wir uns daher anschließen.

Weiterhin drücken wir die Maßsystemkonstante $\varkappa_o$ durch Lichtgeschwindigkeit c und die Konstanten ϵ_o und μ_o , die Kreisfrequenz ω durch die Vakuumwellenlänge λ_o , diese wiederum durch die Vakuumwellenzahl k_o aus. Zu einer maßsystemfreien Schreibweise der Grundgleichungen gelangen wir schließlich durch Einbeziehung des Vakuumwellenwiderstandes Z_o:

$$\varkappa_o = c\sqrt{\epsilon_o/\mu_o} \quad , \quad k_o = \frac{2\pi}{\lambda_o} \quad , \quad Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}}$$

Die zeit- und maßsystemfreie Schreibweise der Grundgleichungen lautet damit

$$\boxed{\mathrm{rot}(Z_o\vec{H}) = jk_o(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_o}\vec{P}_\epsilon) \quad , \quad \mathrm{rot}(\vec{E}) = -jk_o\mu_r(Z_o\vec{H})}$$

Der Vektor $Z_o\vec{H}$ hat in jedem Maßsystem die gleiche physikalische Dimension wie $\vec{E}$ (er entspricht dem $\mathfrak{H}$ im cgs-Schrifttum).

Im isotropen Medium können wir die erste dieser beiden Gleichungen weiter vereinfachen:

$$\mathrm{rot}(Z_o\vec{H}) = jk_o\epsilon_r^c\vec{E} \quad , \qquad \mathrm{rot}(\vec{E}) = -jk_o\mu_r(Z_o\vec{H})$$

Diese beiden Gleichungen vereinigen wir zur Wellengleichung:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\vec{E})) = -jk_o\mu_r(\mathrm{rot}(Z_o\vec{H})) = k_o^2\,\epsilon_r^c\,\mu_r\,\vec{E}$$

Im elektrisch anisotropen Medium haben wir statt dessen

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\vec{E})) = k_o^2\,\mu_r\,(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_o}\vec{P}_\epsilon)\,.$$

2. Ebene Wellen in homogenen, isotropen Medien

Wir suchen einfache Ortsfunktionen, mit deren Hilfe wir beliebig vom Ort abhängige Felder genauso zusammensetzen können wie beliebige Zeitfunktionen aus harmonischen. Im Vakuum bzw. nichtleitenden Medium eignen sich hierfür ebene Wellen. Im leitenden Medium müssen wir stattdessen inhomogene ebene Wellen ansetzen. Als allgemeinen Lösungstypus der Grundgleichungen im isotropen, homogenen Medium werden wir schließlich das Wellenpaar kennenlernen.

2.1 Homogene, ebene Wellen

2.1.1 Formale Beschreibung

In einem unendlich ausgedehnten, homogen mit nichtleitendem Material (DK = ϵ_r , IK = μ_r) erfüllten Raum breite sich eine ebene Welle vorgegebener Richtung aus. Diese Ausbreitungsrichtung charakterisiseren wir durch einen Einheitsvektor, den

Wellennormalvektor $\mathfrak{1}_\mathfrak{k}$

Dann sind die Ebenen konstanter Phase gegeben durch ihre Hessesche Normalform ($\vec{r}$ = Ortsvektor)

$$(\vec{r}\cdot\mathfrak{1}_\mathfrak{k}) = \mathrm{const} = s_\mathfrak{k}$$

Hierin hat $s_\mathfrak{k}$ die Bedeutung einer Koordinate längs einer Achse, deren Richtung durch $\mathfrak{1}_\mathfrak{k}$ gegeben ist. Der Elektrische Vektor der ebenen Welle wird damit:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_o\exp(j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{r}\cdot\mathfrak{1}_\mathfrak{k}))) = \vec{E}_o\,u_{pr}(\vec{r},t)$$

Hierin ist $\vec{E}_o$ der - im ganzen Raum konstante - Amplitudenvektor, λ die Wellenlänge und $u_{pr}(\vec{r},t)$ die skalare Ausbreitungsfunktion der ebenen Welle.

Als Brechzahl n^c bezeichnen wir das Verhältnis der Vakuumlichtgeschwindigkeit c zur Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{ph} bzw. der Wellenlänge im Medium , λ , zur Vakuumwellenlänge λ_o. Mit k bezeichnen wir die Wellenzahl im Medium, mit k_o die Vakuumwellenzahl. Diese Größen hängen untereinander folgendermaßen zusammen:

$$k = \frac{\omega}{v_{ph}} = \frac{\omega}{c}n^c = k_o n^c = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_o}n^c$$

Schließlich führen wir noch ein den

Wellenvektor $\vec{\mathfrak{k}} = k\,\mathfrak{1}_\mathfrak{k} = k_o n^c \mathfrak{1}_\mathfrak{k}$

Mit seiner Hilfe erhält die Ausbreitungsfunktion die allgemeine Form

$$\underline{u_{pr}(r,t) = \exp(j(\omega t - \vec{\mathfrak{k}}\cdot\vec{r}))}$$

2.1.2 Zusammenhang zwischen den Materialkonstanten, der Ausbreitungsrichtung, den Feldvektoren und der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Wenn die DK und IK eines Mediums sowie die Ausbreitungsrichtung 1_{Φ} vorgegeben sind, so folgt

a) eine Aussage über die Richtung des Amplitudenvektors $\vec{E}_o$ aus der Grundgleichung (5a) :

$$\mathrm{div}(\vec{D}) = \epsilon_r \epsilon_o \,\mathrm{div}(\vec{E}_o\, u_{pr}(r,t)) = \epsilon_r \epsilon_o \,(u_{pr}\mathrm{div}(\vec{E}_o) + \vec{E}_o \cdot \mathrm{grad}(u_{pr})) = 0$$

Hierin ist $\mathrm{div}(\vec{E}_o) = 0$, da ja $\vec{E}_o$ im ganzen Raum konstant sein soll,

$$\mathrm{grad}(u_{pr}) = \mathrm{grad}(\exp(j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}))) = -j\vec{k}u_{pr}$$

Daher : $\underline{\mathrm{div}(\vec{E}) = \vec{E}_o \cdot \mathrm{grad}(u_{pr}) = -j\vec{k}\cdot E = -j\, k_o\, n^c\, 1_{\Phi}\cdot\vec{E} = 0}$

<u>In nichtleitenden, isotropen Medien steht der E-vektor senkrecht auf dem Wellennormalvektor.</u>

b) eine Aussage über die Richtung des H-vektors aus der Grundgleichung (1b)

$$\mathrm{rot}(\vec{E}) = \mathrm{rot}(\vec{E}_o\, u_{pr}(r,t)) = u_{pr}\,\mathrm{rot}(\vec{E}_o) - \vec{E}_o \times \mathrm{grad}(u_{pr}) \quad (\text{mit } \mathrm{rot}(\vec{E}_o) = 0)$$

$$= -\vec{E}_o \times (-j\vec{k}u_{pr}) = -j\vec{k}\times\vec{E} = -jk_o/u_r(Z_o\vec{H})$$

<u>Der H-vektor steht senkrecht auf dem E-vektor und auf dem Wellenvektor</u>.

c) eine Aussage über die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{ph} und damit über die Brechzahl n^c aus der Wellengleichung

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\vec{E})) = -\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E}) = (\vec{k}\cdot\vec{k})\vec{E} - (\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k} = \vec{k}^2\vec{E} = k_o^2\,(n^c)^2\,\vec{E} = k_o^2\,\epsilon_r/u_r\vec{E}$$

sodaß $\underline{(n^c)^2 = \epsilon_r/u_r}$

Wir ersehen aus den obigen Umformungen, daß im Falle der ebenen Welle die Anwendung des (vektoriellen) Nablaoperators reduziert wird auf die innere bzw. äußere Multiplikation mit dem Vektor $-j\vec{k}$. Die Grundgleichungen erhalten für ebene Wellen die Form

$$\mathrm{rot}(Z_o\vec{H}) = -j\vec{k}\times(Z_o\vec{H}) = jk_o\epsilon_r^c\,\vec{E} \quad , \quad \mathrm{rot}(\vec{E}) = -j\vec{k}\times\vec{E} = -jk_o/u_r(Z_o\vec{H})$$

$$\mathrm{div}(\vec{D}) = -\epsilon_r\,\epsilon_o\, j\vec{k}\cdot\vec{E} = \rho_q \approx 0 \quad , \quad \mathrm{div}(\vec{B}) = -/u_r/u_o\; j\vec{k}\cdot\vec{H} = 0$$

2.1.3 Welleneigene Koordinatensysteme

In der Ionosphärenphysik wird durch die Senkrechte zur Erdoberfläche eine Vorzugsrichtung vorgegeben, welche wir mit der z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems identifizieren. Damit wird die x,y-Ebene Tangentialebene zur Erdoberfläche. Geben wir weiterhin die Richtung des Wellennormalvektors 1_{Φ} vor, so ist durch diese und die z-Achse die Orientierung der <u>Ausbreitungsebene</u> bestimmt. <u>Wir wählen die x-Achse so, daß die z,x-Ebene mit der Ausbreitungsebene zusammenfällt</u>. Damit halten wir uns an die von <u>Budden</u> (1961) verwendete Schreibweise.

Das x,y,z-System ist zwar unentbehrlich, um die Ausbreitungsrichtung mit Hilfe von Richtungscosinus überhaupt festlegen zu können. Für eine einzelne Welle jedoch liefert es nicht die einfachst-mögliche Beschreibung der im vorigen Abschnitt abgeleiteten Beziehungen zwischen $\vec{E}$, $\vec{H}$ und 1_{Φ} . Aus diesem Grunde finden wir in der Lehrbuch-Literatur häufig die Ausbreitungsrichtung mit einer der drei Koordinatenachsen identifiziert. Das steht uns hier nicht mehr frei, da wir die z-Achse prinzipiell nicht mit einer anderen als der angegebenen Bedeutung belegen wollen. Statt dessen werden wir <u>welleneigene Koordinatensysteme</u> verwenden, welche eine gewisse Ähnlichkeit mit den Bahn-Koordinatensystemen der Punkt-Mechanik haben. Der Wellennormalvektor 1_{Φ} entspricht in dieser

Analogie dem zur Teilchenbahn tangentiellen Einheitsvektor, die Ausbreitungsebene der Schmiegeebene. Einen - zum Binormalvektor analogen - Einheitsvektor $1_\perp$ senkrecht zur Ausbreitungsebene gewinnen wir aus 1_Φ und dem Einheitsvektor in z-Richtung , 1_z , folgendermaßen:

$$1_\perp = \frac{1_z \times 1_\Phi}{\sqrt{1-(1_z \cdot 1_\Phi)^2}} \quad , \quad \text{wobei } \sqrt{1-(1_z \cdot 1_\Phi)^2} = \sin(\Theta_\Phi)$$

gleich dem sinus des Neigungswinkels Θ_Φ zwischen 1_z und 1_Φ ist.

Einen dritten, zur Ausbreitungsebene parallelen Einheitsvektor (entsprechend dem Normalenvektor einer Teilchenbahn) gewinnen wir schließlich durch

$$1_\parallel = 1_\perp \times 1_\Phi$$

In der Reihenfolge ($1_\parallel$,$1_\perp$, 1_Φ) bilden die Einheitsvektoren des Welleneigenen Systems ein rechtshändiges Koordinatensystem, gehen also aus dem Koordinatensystem (1_x, 1_y, 1_z) durch Drehung (ohne Spiegelung!) hervor. Für ihre Richtungscosinus führen wir folgende Abkürzungen ein :

$$\cos(\Theta_\Phi) = (1_z \cdot 1_\Phi) = C \quad , \quad \sin(\Theta_\Phi) = S \, ,$$

und erhalten für den Übergang vom x,y,z-System zum welleneigenen System (Bild 2.1)

$$\begin{pmatrix} 1_\parallel \\ 1_\perp \\ 1_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 & -S \\ 0 & 1 & 0 \\ S & 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_x \\ 1_y \\ 1_z \end{pmatrix}$$

Das System ($1_\parallel$, $1_\perp$, 1_Φ) wurde so gewählt, daß es mit dem x,y,z-System zusammenfällt, wenn $1_\Phi = 1_z$, d.h. wenn die Welle senkrecht aufsteigt.

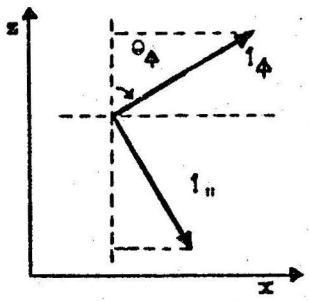


Bild 2.1: Einheitsvektoren des welleneigenen Koordinatensystems

2.1.4 Zusammensetzung der ebenen Welle aus TM- und TE-Anteil

Im welleneigenen Koordinatensystem hat der Wellenvektor $\vec{k}$ nur eine Komponente in 1_Φ-Richtung. Für den E- und H-vektor einer ebenen Welle erhalten wir die allgemeine Darstellung

$$\vec{E} = (1_\parallel E_\parallel + 1_\perp E_\perp + 1_\Phi E_\Phi)\, e^{j\varphi} \, , \quad (Z_o\vec{H}) = (1_\parallel Z_o H_\parallel + 1_\perp Z_o H_\perp + 1_\Phi Z_o H_\Phi)\, e^{j\varphi}$$

$$(\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

mit der wir in die Grundgleichungen (in der Form Abschn. 2.1.2, Ende) eingehen (wobei die Ausbreitungsfunktion $u_{pr} = \exp(j\varphi)$ hier nicht mitgeschrieben wird) : $\vec{k} = k_o n^c \, 1_\Phi$

$$-j\vec{k} \times (Z_o\vec{H}) \mathrel{\hat{=}} -jk_o n^c \begin{pmatrix} -Z_o H_\perp \\ Z_o H_\parallel \\ 0 \end{pmatrix} = jk_o \epsilon_r^c \begin{pmatrix} E_\parallel \\ E_\perp \\ E_\Phi \end{pmatrix} \, , \quad -j\vec{k} \times \vec{E} \mathrel{\hat{=}} -jk_o n^c \begin{pmatrix} -E_\perp \\ E_\parallel \\ 0 \end{pmatrix} = -jk_o/u_r \begin{pmatrix} Z_o H_\parallel \\ Z_o H_\perp \\ Z_o H \end{pmatrix}$$

Die Komponenten von $\vec{E}$ und $Z_o\vec{H}$ in 1_Φ-Richtung sind demzufolge Null, die Vektorkoordinate $Z_o H_\parallel$ hängt nur mit der Vektorkoordinaten $E_\perp$, die Koordinate $E_\parallel$ nur mit $Z_o H_\perp$ zusammen:

$$E_\parallel = \frac{n^c}{\epsilon_r^c} Z_o H_\perp = \frac{/u_r}{n^c} Z_o H_\perp \quad , \quad Z_o H_\parallel = \frac{\epsilon_r^c}{n^c}(-E_\perp) = \frac{n^c}{/u_r}(-E_\perp)$$

Das Feld einer ebenen , elektromagnetischen Welle läßt sich also durch zwei, voneinander unabhängige Anteile beschreiben:

Eine TM-Welle, deren H-vektor senkrecht und deren E-vektor parallel zur Ausbreitungsebene liegt,

Eine TE-Welle, deren E-vektor senkrecht und deren H-vektor parallel zur Ausbreitungsebene liegt.

Der E-Vektor der TM-Welle zeigt in $+1_{\parallel}$-Richtung, wenn ihr H-vektor in $+1_{\perp}$-Richtung zeigt,
Der H-vektor der TE-Welle zeigt in $+1_{\parallel}$-Richtung, wenn ihr E-vektor in $-1_{\perp}$-Richtung zeigt.
Das Verhältnis zwischen dem TM- und dem TE-Anteil einer ebenen Welle wird beschrieben durch ihre

$$\underline{\text{Wellenpolarisation}} \quad P_E = \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = -\frac{Z_o H_{\parallel}}{Z_o H_{\perp}} \quad ,$$

welche ein Verhältnis darstellt, also vom Vektor der dielektrischen Polarisation $\vec{P}_{\epsilon}$ wohl unterschieden werden muß! P_E verschwindet im Falle einer reinen TM-Welle und geht gegen unendlich im Falle einer reinen TE-Welle.

2.2 Inhomogene, ebene Wellen

In leitenden Medien ist die Ausbreitung stets mit einer Dämpfung verbunden. Von einer homogenen Welle sprechen wir dann, wenn der Gradient des Amplitudenbetrages dem Wellennormalvektor parallel ist, wenn also die Ebnenen konstanter Amplitude parallel zu den Ebenen konstanter Phase liegen. In einer inhomogenen, ebenen Welle ist das nicht mehr der Fall. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß schon die einfachsten Randwertaufgaben ohne diesen Wellentyp nicht zu lösen sind (vgl. auch Pohl, 1948, § 90).

2.2.1 Formale Beschreibung mit dem komplexen Wellenvektor

Wir bezeichnen den Einheitsvektor senkrecht zu den Ebenen konstanter Phase mit 1_{ph},
den Einheitsvektor senkrecht zu den Ebenen konstanter Amplitude mit 1_{at}
(Phasen-Normale bzw. Dämpfungsnormale).

Damit lautet die Beschreibung der inhomogenen, ebenen Welle

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_o \exp\left(-\frac{\vec{r}\cdot 1_{at}}{s_{at}}\right) \exp\left(j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{r}\cdot 1_{ph})\right)\right)$$

Hierin ist s_{at} die Länge einer zu 1_{at} parallelen Strecke, längs derer der Amplitudenbetrag um den Faktor e abnimmt.

Die Vektoren $1_{at}\frac{1}{s_{at}}$ und $1_{ph}\frac{2\pi}{\lambda}$ ziehen wir zusammen zu einem

$$\underline{\text{komplexen Wellenvektor}} \quad \underline{\vec{k}^c = \vec{k}^{re} + j\vec{k}^{im} = 1_{ph}\frac{2\pi}{\lambda} - j1_{at}\frac{1}{s_{at}}}$$

und erhalten eine Darstellung der inhomogenen, ebenen Welle, die formal mit der der ebenen Welle übereinstimmt :

$$\underline{\vec{E}(r,t) = \vec{E}_o \exp(j(\omega t - (\vec{k}^c\cdot\vec{r})))}$$

2.2.2 Zusammenhänge zwischen den Materialkonstanten, den Feldvektoren und dem komplexen Wellenvektor

2.2.2.1 Folgerungen aus den Grundgleichungen

Die Leitfähigkeitsverluste im Medium werden formal durch die komplexe (relative) DK erfaßt:

$$\epsilon_r^c = \epsilon_r^{re} + j\epsilon_r^{im} = \epsilon_r - j\frac{\sigma_q}{\epsilon_o\,\omega}$$

Wie in Abschnitt 2.1.2 kann man zeigen, daß die Anwendung des vektoriellen Nabla-Operators für die inhomogene ebene Welle auf eine innere bzw. äußere Multiplikation mit dem komplexen Wellenvektor zurückgeführt werden kann.

Damit können wir, analog zu Abschn. 2.1.2 , Beziehungen zwischen dem E-, H- und Wellenvektor ableiten:

a) Eine Aussage über die Richtungsbeziehung zwischen $\vec{k}^c$ und $\vec{E}$ folgt aus

$$\mathrm{div}(\vec{D}) = \mathrm{div}(\epsilon_r^c\,\epsilon_o\,\vec{E}) = \epsilon_r^c\,\epsilon_o\,(-j\vec{k}^c\cdot\vec{E}) = 0$$

<u>Der E-vektor ist orthogonal zum komplexen Wellenvektor</u>. Diese formale Orthogonalität darf jedoch nicht, wie in 2.1.2, einfach dahingehend interpretiert werden, daß $\vec{E}$ senkrecht auf $\vec{k}$ steht. Vielmehr folgt aus dieser Beziehung, daß auch $\vec{E}$ aus einem Real- und einem Imaginärteil zusammengesetzt ist, die einander nicht parallel zu sein brauchen.

b) Eine Aussage über die Richtung von $\vec{H}$ folgt aus

$$\mathrm{div}(\vec{B}) = \mathrm{div}(\mu_r\mu_o\vec{H}) = \mu_r\mu_o(-j\vec{k}^c\cdot\vec{H}) = 0 \quad \text{und}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{E}) = -j\vec{k}^c\times\vec{E} = -jk_o\mu_r(Z_o\vec{H})$$

<u>Der H-vektor ist orthogonal zu $\vec{k}^c$ und zu $\vec{E}$</u> , wobei auch hier die Orthogonalität nicht einfach im Sinne geometrischen Senkrechtstehens interpretiert werden darf.

c) Eine Aussage über den Zusammenhang zwischen den Materialkonstanten und dem Wellenvektor folgt aus der Wellengleichung :

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\vec{E})) = -\vec{k}^c\times(\vec{k}^c\times\vec{E}) = (\vec{k}^c\cdot\vec{k}^c)\,\vec{E} - (\vec{k}^c\cdot\vec{E})\,\vec{k}^c = k_o^2\,\epsilon_r^c\,\mu_r\,\vec{E}$$

ausgeschrieben:

$$(\vec{k}^c\cdot\vec{k}^c) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{s_{at}}\right)^2 - j\,2\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{1}{s_{at}}\,(1_{ph}\cdot 1_{at}) = k_o^2\mu_r\left(\epsilon_r - j\,\frac{\sigma_q}{\epsilon_o\,\omega}\right) = k_o^2\,\epsilon_r^c\,\mu_r$$

Besonders bemerkenswert an der letzten Aussage ist, daß der Imaginärteil des Wellenvektors, $1_{at}/s_{at}$, auch dann von Null verschieden sein kann, wenn das Medium nicht leitfähig ist! Dann jedoch muß das skalare Produkt aus 1_{at} und 1_{ph} verschwinden:

> <u>Im Nichtleiter bzw. Vakuum gibt es, neben homogenen, ungedämpften Wellen, inhomogene Wellen, bei denen die Dämpfungsnormale senkrecht auf der Phasennormalen steht</u>.

Der Typ der "senkrecht gedämpften Welle" spielt eine entscheidende Rolle für das physikalische Verständnis der Integraldarstellungen beliebiger Wellenfelder (s. z.B. Sommerfeld, 1947 , Stratton, 1941, Clemmow, 1966). Er taucht ferner auf bei der Totalreflexion (Pohl, 1948) und im Innern von Wellenleitern ("evanescent modes", Budden, 1962).

<u>2.2.2.2 Komplexe Brechzahl und komplexer Wellennormalvektor</u>

Eine weitere Darstellung der inhomogenen ebenen Welle ergibt sich daraus, daß die Darstellung des Wellenvektors als Produkt aus Vakuumwellenzahl, Brechzahl und Wellennormalvektor (s. Abschn. 2.1.1) formal auf den komplexen Wellenvektor ausgedehnt wird (Clemmow, 1966):

$$\vec{k}^c = 1_{ph}\,\frac{2\pi}{\lambda} - j\,1_{at}\,\frac{1}{s_{at}} = k_o\,n^c\,1_{\Phi}^c$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt dann

$$(\vec{k}^c\cdot\vec{k}^c) = k_o^2\,(n^c)^2\,(1_{\Phi}^c\cdot 1_{\Phi}^c) = k_o^2\,\epsilon_r^c\,\mu_r$$

Diese Bedingung wird erfüllt

durch die komplexe Brechzahl $n^c = n^{re} + j\,n^{im} = \sqrt{\mu_r\left(\epsilon_r - j\,\frac{\sigma_q}{\epsilon_o\,\omega}\right)}$, und

durch einen komplexen Wellennormalvektor $1_{\Phi}^c = \vec{1}_{\Phi}^{re} + j\,\vec{1}_{\Phi}^{im}$ welcher erfüllt

$$(1_{\Phi}^c\cdot 1_{\Phi}^c) = (\vec{1}_{\Phi}^{re}\cdot\vec{1}_{\Phi}^{re}) - (\vec{1}_{\Phi}^{im}\cdot\vec{1}_{\Phi}^{im}) + 2\,j\,(\vec{1}_{\Phi}^{re}\cdot\vec{1}_{\Phi}^{im}) = 1$$

Hieraus ersehen wir: Real- und Imaginärteil des komplexen Wellennormalvektors stehen aufeinander senkrecht. Sie sind jedoch, für sich genommen, keine Einheitsvektoren . Ihre Beträge verhalten sich zueinander wie cosinus-hyperbolicus und sinus-hyperbolicus zu einem beliebigen Argument. Eine ausführliche Diskussion dieses Sachverhaltes findet sich bei Clemmow (1966).

Der Wellenvektor hängt mit dem Wellennormalvektor folgendermaßen zusammen:

$$\vec{k}^c = \vec{k}^{re} + j\vec{k}^{im} = (n^{re} + j\, n^{im})\,(\vec{1}_{\uparrow}^{re} + j\,\vec{1}_{\uparrow}^{im}) \text{ , in Spaltenschreibweise:}$$

$$\begin{pmatrix} 1_{ph}\,\frac{2\pi}{\lambda} \\ 1_{at}\,\frac{1}{s_{at}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^{re} & -n^{im} \\ -n^{im} & -n^{re} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{1}_{\uparrow}^{re} \\ \vec{1}_{\uparrow}^{im} \end{pmatrix}$$

Real- und Imaginärteil des Wellenvektors und des Wellennormalvektors liegen in derselben Ebene.

Der komplexe Wellennormalvektor kann demzufolge nicht mehr anschaulich als Normalvektor zu den Ebenen konstanter Phase interpretiert werden. Sein Nutzen besteht darin, daß er die formale Gleichbehandlung homogener und inhomogener, ebener Wellen ermöglicht.

2.2.3 Welleneigenes Koordinatensystem inhomogener Wellen

2.2.3.1 Konstruktion der Einheitsvektoren

Wie in 2.1.3 können wir die - geophysikalisch vorgegebene - z-Achse benutzen, um den komplexen Wellennormalvektor $1_{\uparrow}^c$ zu einem welleneigenen System komplexer Einheitsvektoren zu ergänzen :

$$1_{\perp}^c = \frac{(1_z \times 1_{\uparrow}^c)}{\sqrt{1 - (1_z \cdot 1_{\uparrow}^c)^2}} \quad , \quad 1_{\parallel}^c = 1_{\perp}^c \times 1_{\uparrow}^c$$

Wie $1_{\uparrow}^c$ haben auch die beiden neuen Einheitsvektoren Real- und Imaginärteile, die aufeinander senkrecht stehen und dem Betrage nach nicht unbedingt eins sein müssen. Dennoch können wir mit ihnen formal genauso rechnen wie mit den reellen Einheitsvektoren in 2.1.3.

2.2.3.2 Komplexe Richtungscosinus und komplexe Neigungswinkel

Wir nehmen nun wieder an, daß die Ausbreitungsebene mit der z,x-Ebene zusammenfällt, daß also das gesamte Feld nicht von der Ortskoordinate y abhängen soll. Dann liegen die Phasennormale, Dämpfungsnormale, Real- und Imaginärteil des komplexen Wellennormalvektors in der z,x-Ebene. Dehnen wir die Komponentendarstellung des Wellennormalvektors im x,y,z-System formal auf den komplexen Wellennormalvektor aus (vgl. 2.1.3)

$$1_{\uparrow}^c = \vec{1}_{\uparrow}^{re} + j\,\vec{1}_{\uparrow}^{im} = 1_x\,\underline{S} + 1_z\,\underline{C} = 1_x \sin(\underline{\theta}_{\uparrow}) + 1_z \cos(\underline{\theta}_{\uparrow})$$

so sind wir genötigt, auch für die Richtungscosinus komplexe Werte anzusetzen. Diese bezeichnen wir als komplexe Richtungscosinus . Wir verlangen von ihnen, daß

$$(1_{\uparrow}^c \cdot 1_{\uparrow}^c) = \underline{S}^2 + \underline{C}^2 = 1 = (\vec{1}_{\uparrow}^{re} \cdot \vec{1}_{\uparrow}^{re}) - (\vec{1}_{\uparrow}^{im} \cdot \vec{1}_{\uparrow}^{im}) + j\,2\,(\vec{1}_{\uparrow}^{re} \cdot \vec{1}_{\uparrow}^{im})$$

Diese Forderung ist dadurch zu erfüllen, daß auch für den Neigungswinkel $\theta_{\uparrow}$ ein komplexer Wert eingeführt wird:

$$\underline{\theta}_{\uparrow} = \theta_{\uparrow}^{re} + j\,\theta_{\uparrow}^{im}$$

Dann wird

$$\underline{C} = \cos(\underline{\theta}_{\uparrow}) = \cos(\theta_{\uparrow}^{re})\cosh(\theta_{\uparrow}^{im}) - j\sin(\theta_{\uparrow}^{re})\sinh(\theta_{\uparrow}^{im})$$

$$\underline{S} = \sin(\underline{\theta}_{\uparrow}) = \sin(\theta_{\uparrow}^{re})\cosh(\theta_{\uparrow}^{im}) + j\cos(\theta_{\uparrow}^{re})\sinh(\theta_{\uparrow}^{im})$$

Komplexe Richtungscosinus und komplexe Einfallswinkel spielen in der theoretischen Behandlung der Wellenausbreitung eine große Rolle (Beispiel: Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen, siehe Sommerfeld, 1947). Physikalisch bedeuten sie, wie unsere Einführung zeigt, nichts anderes als inhomogene, ebene Wellen.

Der komplexe Wellennormalvektor wird nun

$$\mathbf{1}_{\Uparrow}^{c} = \mathbf{1}_x \underline{S} + \mathbf{1}_z \underline{C} = (\mathbf{1}_x \sin(\vartheta^{re}) + \mathbf{1}_z \cos(\vartheta^{re}))\cosh(\vartheta^{im})$$
$$+ j\,(\mathbf{1}_x \cos(\vartheta^{re}) - \mathbf{1}_z \sin(\vartheta^{re}))\sinh(\vartheta^{im}) = \vec{\mathbf{I}}_{\Uparrow}^{re} + j\,\vec{\mathbf{I}}_{\Uparrow}^{im}$$

An dieser Darstellung sehen wir sofort, daß Real- und Imaginärteil des komplexen Wellennormalvektors aufeinander senkrecht stehen. Für die beiden anderen Einheitsvektoren erhalten wir:

$$\mathbf{1}_{\perp}^{c} = \frac{1}{\underline{S}}(\mathbf{1}_z \times \mathbf{1}_{\Uparrow}^{c}) = \mathbf{1}_y \;,\quad \mathbf{1}_{\parallel}^{c} = \mathbf{1}_{\perp}^{c} \times \mathbf{1}_{\Uparrow}^{c} = \mathbf{1}_y \times \mathbf{1}_{\Uparrow}^{c} = \mathbf{1}_x \underline{C} - \mathbf{1}_z \underline{S} =$$
$$(\mathbf{1}_x \cos(\vartheta^{re}) - \mathbf{1}_z \sin(\vartheta^{re}))\cosh(\vartheta^{im})$$
$$- j\,(\mathbf{1}_x \sin(\vartheta^{re}) + \mathbf{1}_z \cos(\vartheta^{re}))\sinh(\vartheta^{im})$$

Der Realteil von $\mathbf{1}_{\parallel}^{c}$ hat demzufolge die gleiche Richtung wie der Imaginärteil von $\mathbf{1}_{\Uparrow}^{c}$, der Imaginärteil von $\mathbf{1}_{\parallel}^{c}$ hat die entgegengesetzte Richtung wie der Realteil von $\mathbf{1}_{\Uparrow}^{c}$.

Schließlich drücken wir noch den komplexen Wellenvektor mit dem komplexen Neigungswinkel aus:

$$\vec{\mathfrak{k}}^{c} = \mathbf{1}_{ph}\frac{2\pi}{\lambda} - j\,\mathbf{1}_{at}\frac{1}{s_{at}} = k_o\,(n^{re} + j\,n^{im})(\vec{\mathbf{I}}_{\Uparrow}^{re} + j\,\vec{\mathbf{I}}_{\Uparrow}^{im}) = k_o\,(n^{re} + j\,n^{im})(\mathbf{1}_x\underline{S} + \mathbf{1}_z\underline{C})$$

und setzen in die Wellengleichung ein

$$(\vec{\mathfrak{k}}^{c}\cdot\vec{\mathfrak{k}}^{c}) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{s_{at}}\right)^2 - j\,2\,\frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{s_{at}}(\mathbf{1}_{ph}\cdot\mathbf{1}_{at}) = k_o^2\,((n^{re})^2 - (n^{im})^2 + j\,2\,n^{re}n^{im})$$
$$= k_o^2\,\mu_r\,\epsilon_r^{c} = k_o^2\,\mu_r\left(\epsilon_r - j\,\frac{\sigma_q}{\epsilon_o\,\omega}\right)$$

Nach einiger Umrechnung ergibt sich

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = ((n^{re})^2\cosh^2(\vartheta^{im}) + (n^{im})^2\sinh^2(\vartheta^{im}))\;,$$

$$\left(\frac{1}{s_{at}}\right)^2 = ((n^{im})^2\cosh^2(\vartheta^{im}) + (n^{re})^2\sinh^2(\vartheta^{im}))\;,\ \text{mit } Ch = \cosh(\vartheta^{im})\;,\ Sh = \sinh(\vartheta^{im})\;:$$

$$(\mathbf{1}_{ph}\cdot\mathbf{1}_{at}) = \frac{k_o^2\,\mu_r\,\sigma_q}{\epsilon_o\,\omega\,\frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{s_{at}}} = \frac{k_o^2\,n^{re}\,n^{im}}{\sqrt{((n^{re})^2Ch^2 + (n^{im})^2Sh^2)((n^{im})^2Ch^2 + (n^{re})^2Sh^2)}}$$

2.3 Wellenpaare

2.3.1 Differentialgleichungssystem

Wir betrachten die ebene, inhomogene Welle als mathematisches Lösungselement für die Grundgleichungen, mit dessen Hilfe wir beliebig komplizierte Lösungen konstruieren können. Auf einen immer noch sehr einfachen Lösungstyp, einer Kombination von zwei ebenen Wellen zu einem Wellenpaar, stoßen wir, wenn wir wieder zum x,y,z-System zurückkehren und die Grundgleichungen unter der einzigen Vereinfachung aufschreiben, daß die z,x-Ebene Ausbreitungsebene sein soll, d.h.: daß die Vektorkoordinaten unseres elektromagnetischen Feldes nicht von der Koordinate y abhängen sollen. Die Grundgleichungen

$$\mathrm{rot}(Z_o\vec{H}) = jk_o\,\epsilon_r^c\,\vec{E} \qquad\qquad \mathrm{rot}(\vec{E}) = -jk_o\,/u_r\,(Z_o\vec{H})$$

werden mit der Vereinfachung $\frac{\partial}{\partial y} = 0$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix} = -jk_o\,/u_r \begin{pmatrix} Z_oH_x \\ Z_oH_y \\ Z_oH_z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{\partial(Z_oH_y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(Z_oH_x)}{\partial z} - \frac{\partial(Z_oH_z)}{\partial x} \\ \frac{\partial(Z_oH_y)}{\partial x} \end{pmatrix} = jk_o\epsilon_r^c \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

In diesen Gleichungen hängt E_y nur mit Z_oH_x und Z_oH_z, Z_oH_y nur mit E_x und E_z zusammen. Dementsprechend gruppieren wir die Gleichungen um zu je einem Differentialgleichungssystem für die TM-und die TE-Welle. Um die Analogie zwischen beiden möglichst weit zu treiben, nehmen wir die Unbequemlichkeit in Kauf, statt der Koordinate E_y immer die Koordinate $(-E_y)$ zu verwenden:

TM-Welle		TE-Welle	
$-\frac{\partial(Z_oH_y)}{\partial z}$	$= jk_o\,\epsilon_r^c\,E_x$	$-\frac{\partial(-E_y)}{\partial z}$	$= jk_o/u_r(Z_oH_x)$
$\frac{\partial(Z_oH_y)}{\partial x}$	$= jk_o\,\epsilon_r^c\,E_z$	$\frac{\partial(-E_y)}{\partial x}$	$= jk_o/u_r(Z_oH_z)$
$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}$	$= -jk_o/u_rZ_oH_y$	$\frac{\partial(Z_oH_x)}{\partial z} - \frac{\partial(Z_oH_z)}{\partial x}$	$= -jk_o\,\epsilon_r^c\,(-E_y)$

Elimination der untersten durch die beiden darüberstehenden Zeilen führt auf die <u>Wellengleichungen</u>

$$\frac{\partial^2(Z_oH_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(Z_oH_y)}{\partial z^2} + k_o^2/u_r\,\epsilon_r^c\,Z_oH_y = 0\,, \quad \frac{\partial^2(-E_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(-E_y)}{\partial z^2} + k_o^2/u_r\,\epsilon_r^c\,(-E_y) = 0$$

welche wir durch Lösungen der Form

$$F(x,z) = F_x(x)\,F_z(z) = F_o\,\exp(-j\underline{k}_x x)\,\exp(-j\underline{k}_z z) \text{ mit}$$

$$\underline{k}_x^2 + \underline{k}_z^2 = \underline{k}^2 = k_o^2/u_r\,\epsilon_r^c$$

erfüllen können.

2.3.2 Zusammensetzung der TM- und der TE-Welle aus Wellenpaaren

Jede der beiden Wellengleichungen hat im nichtleitenden Medium eine allgemeine Lösung, die aus vier Teillösungen zusammengesetzt ist:

Zwei Wellen mit positivem k_x, welche in den Halbraum $x > 0$,
zwei Wellen mit negativem k_x, welche in den Halbraum $x < 0$ laufen.

Je zwei Wellen mit gleichem k_x bilden ein Wellenpaar , jedes Wellenpaar enthält

eine Welle mit $k_z = +\sqrt{k^2 - k_x^2}$, welche in den Halbraum $z > 0$,

eine Welle mit $k_z = -\sqrt{k^2 - k_x^2}$, welche in den Halbraum $z < 0$ läuft.

Wir können uns im Rahmen dieser Ausarbeitung auf Wellenpaare beschränken, die in den Halbraum $x > 0$ laufen, also k_x als positiv betrachten. Im leitenden Medium werden $\underline{k}$, $\underline{k}_x$ und $\underline{k}_z$ komplex, wir beschränken uns auf die Betrachtung von Wellenpaaren mit positivem Realteil von $\underline{k}_x$.

Als Lösungen der Wellengleichungen erhalten wir nun (mit $\varphi_x = (\omega t - \underline{k}_x x)$)

ein TM-Wellenpaar und ein TE-Wellenpaar:

$$Z_oH_y = (Z_oH_\perp^{\uparrow}\exp(-j\sqrt{\underline{k}^2 - \underline{k}_x^2}\, z) + Z_oH_\perp^{\downarrow}\exp(+j\sqrt{\underline{k}^2 - \underline{k}_x^2}\, z))\exp(j\varphi_x) = Z_oH_{tm}^{\uparrow} + Z_oH_{tm}^{\downarrow}$$

$$-E_y = (E_\perp^{\uparrow}\exp(-j\sqrt{\underline{k}^2 - \underline{k}_x^2}\, z) + E_\perp^{\downarrow}\exp(+j\sqrt{\underline{k}^2 - \underline{k}_x^2}\, z))\exp(j\varphi_x) = E_{te}^{\uparrow} + E_{te}^{\downarrow}$$

Durch unsere Vorzeichenwahl ergibt sich: Die Amplitude $E_\perp$ wird positiv gerechnet, wenn sie in -1_y-Richtung zeigt, die Amplitude $Z_oH_\perp$ dagegen, wenn sie in $+1_y$-Richtung zeigt. Diese - auf den ersten Blick umständliche - Vereinbarung hat für spätere Rechnungen den Vorteil, daß in jedem Fall einer positiven $\perp$ - Komponente eine positive x-Komponente entspricht.

Aus den y-Komponenten folgen nun mittels der Differentialgleichungen des vorigen Abschnittes die übrigen Komponenten:

$$E_x = \frac{-1}{jk_o\,\underline{\epsilon}_r^c}\frac{\partial(Z_oH_y)}{\partial z} = \frac{\sqrt{\underline{k}^2 - \underline{k}_x^2}}{k_o\underline{\epsilon}_r^c}(Z_oH_{tm}^{\uparrow} - Z_oH_{tm}^{\downarrow}) \quad , \quad E_z = \frac{1}{jk_o\,\underline{\epsilon}_r^c}\frac{\partial(Z_oH_y)}{\partial x} = -\frac{k_x}{k_o\,\underline{\epsilon}_r^c}Z_oH_y$$

$$Z_oH_x = \frac{-1}{jk_o/\mu_r}\frac{\partial(-E_y)}{\partial z} = \frac{\sqrt{\underline{k}^2 - \underline{k}_x^2}}{k_o/\mu_r}(E_{te}^{\uparrow} - E_{te}^{\downarrow}) \quad , \quad Z_oH_z = \frac{1}{jk_o/\mu_r}\frac{\partial(-E_y)}{\partial x} = -\frac{k_x}{k_o/\mu_r}(-E_y)$$

Die z-Koordinaten sind proportional den y-Koordinaten: Zur vollständigen Beschreibung des TM- bzw. TE-Wellenpaares genügen also die Koordinaten E_x und Z_oH_y bzw. Z_oH_x und $(-E_y)$.

Nun gehen wir zu einer Schreibweise über, die uns den Anschluß an die Literatur über die Ionosphärenphysik erleichtert. Wir identifizieren $\underline{k}_x$ und $\underline{k}_z$ als die x- und z-Vektorkoordinaten des komplexen Wellenvektors, schreiben diesen (vgl. Abschn. 2.2.2.2) als Produkt aus Vakuumwellenzahl, komplexer Brechzahl und komplexem Wellennormalvektor und erhalten

$$\underline{k}_x = k_o\, n^c\, \underline{S} \quad , \quad \underline{k}_z = \pm\sqrt{\underline{k}^2 - \underline{k}_x^2} = \pm k_o\sqrt{\mu_r\,\underline{\epsilon}_r^c - (n^c)^2\underline{S}^2} = \pm k_o\, n^c\, \underline{C}$$

Damit wird

$$E_x = \frac{n^c\,\underline{C}}{\underline{\epsilon}_r^c}(Z_oH_{tm}^{\uparrow} - Z_oH_{tm}^{\downarrow}) \qquad\qquad Z_oH_x = \frac{n^c\,\underline{C}}{\mu_r}(E_{te}^{\uparrow} - E_{te}^{\downarrow})$$

mit

$$Z_oH_{tm}^{\uparrow} = Z_oH_\perp^{\uparrow}\exp(j(\omega t - k_on^c(\underline{S}\,x + \underline{C}\,z))),\ E_{te}^{\uparrow} = E_\perp^{\uparrow}\exp(j(\omega z - k_on^c(\underline{S}\,x + \underline{C}\,z)))$$

$$Z_oH_{tm}^{\downarrow} = Z_oH_\perp^{\downarrow}\exp(j(\omega t - k_on^c(\underline{S}\,x - \underline{C}\,z))),\ E_{te}^{\downarrow} = E_\perp^{\downarrow}\exp(j(\omega t - k_on^c(\underline{S}\,x - \underline{C}\,z)))$$

2.3.3 Matrixschreibweise, Horizontal-Komponentenverhältnis, Reflexionskoeffizient

Wir können unser Wellenpaar vollständig beschreiben

entweder durch die vier Feldvektor-Beträge $Z_oH_{tm}^{\uparrow}$, $Z_oH_{tm}^{\downarrow}$, $E_{te}^{\uparrow}$, $E_{te}^{\downarrow}$

oder durch die vier Horizontal-Koordinaten E_x , Z_oH_y , Z_oH_x , $(-E_y)$

Die im vorigen Abschnitt abgeleiteten Zusammenhänge schreiben wir übersichtlich in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n^c\,\underline{c}}{\epsilon_r^c} & -\frac{n^c\,\underline{c}}{\epsilon_r^c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_oH_{tm}^{\uparrow} \\ Z_oH_{tm}^{\downarrow} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Z_oH_x \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n^c\,\underline{c}}{\mu_r} & -\frac{n^c\,\underline{c}}{\mu_r} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{te}^{\uparrow} \\ E_{te}^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

Umgekehrt:

$$\begin{pmatrix} Z_oH_{tm}^{\uparrow} \\ Z_oH_{tm}^{\downarrow} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_r^c}{n^c\,\underline{c}} & 1 \\ \frac{-\epsilon_r^c}{n^c\,\underline{c}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} E_{te}^{\uparrow} \\ E_{te}^{\downarrow} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\mu_r}{n^c\,\underline{c}} & 1 \\ \frac{-\mu_r}{n^c\,\underline{c}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_oH_x \\ -E_y \end{pmatrix}$$

Um das Verhältnis zwischen der y- und der x-Koordinate eines Wellenpaares zu beschreiben, bedienen wir uns des "Horizontalkomponenten-Verhältnisses"

$$L_{tm} = \frac{Z_oH_y}{E_x} \qquad\qquad L_{te} = \frac{-E_y}{Z_oH_x}$$

Physikalisch hat L_{tm} die Bedeutung einer normierten Admittanz, L_{te} die einer normierten Impedanz. Die Ausdrucksweise dieser Ausarbeitung geht zurück auf Volland (1968, pg. 46 ff).

Das Verhältnis zwischen der auf- und der absteigenden Welle eines Wellenpaares wird beschrieben durch den "Reflexionskoeffizienten"

$$R_{tm} = \frac{Z_oH_{tm}^{\downarrow}}{Z_oH_{tm}^{\uparrow}} \qquad\qquad R_{te} = \frac{E_{te}^{\downarrow}}{E_{te}^{\uparrow}}$$

Aus den obenstehenden Gleichungen ergibt sich sofort der Zusammenhang zwischen Horizontalkomponenten-Verhältnis und Reflexionskoeffizient :

$$R_{tm} = \frac{\frac{n^c\,\underline{c}}{\epsilon_r^c} L_{tm} - 1}{\frac{n^c\,\underline{c}}{\epsilon_r^c} L_{tm} + 1} \qquad\qquad R_{te} = \frac{\frac{n^c\,\underline{c}}{\mu_r} L_{te} - 1}{\frac{n^c\,\underline{c}}{\mu_r} L_{te} + 1}$$

Ist L_{tm} in irgendeiner Höhe gegeben, so folgt daraus das Verhältnis R_{tm}, das gleiche gilt für L_{te} und R_{te}. Dieser Zusammenhang bildet den Ausgangspunkt für die Bestimmung von Reflexionsfaktoren.

Die unmständliche Kennzeichnung komplexer Größen durch hochgestellten Index ^{c} bzw. durch Unterstreichung fällt im weiteren Verlauf des Textes fort. Alle Wellenvektor-koordinaten, Richtungscosinus, Einheitsvektoren, Reflexionskoeffizienten, Horizontal-komponentenverhältnisse usf. sind i.A. komplex, ohne daß hierauf ausdrücklich aufmerksam gemacht wird. Eine Ausnahme bildet das Symbol für den Brechungsindex, n^c , dem das Komplex-Symbol immer angefügt wird, um Verwechselungen mit der ganzzahligen Variablen n zu vermeiden.

3. Reflexion an einer homogenen, isotropen Modellionosphäre

Wir lassen jetzt die vereinfachende Vorstellung fallen, daß der gesamte Raum homogen mit einem Medium konstanter DK und IK erfüllt sei. In Wirklich-keit sind die Dielektrischen Parameter der Ionosphäre komplizierte Funktionen der Höhe und des geographischen Ortes. Die letztere Abhängigkeit müssen wir in diesem Zusammenhang ignorieren, um überhaupt zu einigermaßen übersehbaren Rechnungen zu gelangen. Die Abhängigkeit von der Höhe suchen wir durch einfache Modellfunktionen anzunähern.

3.1 Dielektrische Konstanten einer homogenen, isotropen Modellionosphäre

Im einfachsten Modell, welches für die Begriffsbildung unentbehrlich ist, springt in der "Reflexionshöhe" h der Wert der Elektronendichte N_{el} von Null auf eine endliche Größe. Die Reibungsverluste der Elektronenbewegung erfassen wir durch eine - ebenfalls höhenunabhängige - Stoßfrequenz ν_c (Index $_c$ steht für "collision"). Ein harmonisch schwingendes, elektrisches Feld $\vec{E}(t)$ bewirkt dann eine ebenfalls harmonisch schwingende Verrückung $\vec{s}(t)$ des Elektrons gegen seine Ruhelage

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_o e^{j\omega t} \quad , \quad \vec{s}(t) = \vec{s}_o e^{j\omega t} .$$

Aus der Bewegungsgleichung des einzelnen Elektrons (Ladung q_{el}, Masse m_{el})

$$m_{el} \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = -\omega^2 m_{el}\vec{s} = q_{el}\vec{E} - m_{el}\nu_c \frac{d\vec{s}}{dt} = q_{el}\vec{E} - j\omega m_{el}\nu_c\vec{s}$$

folgt die Darstellung der dielektrischen Polarisation

$$\vec{P}_\epsilon = N_{el}q_{el}\vec{s} = -N_{el}q_{el} \frac{q_{el}}{m_{el}\omega^2}\vec{E}\left(1 - j\frac{\nu_c}{\omega}\right)^{-1}$$

Hieraus folgt die dielektrische Verschiebung und die relative DK:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_o \vec{E} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}_\epsilon = \epsilon_o\left(1 - \frac{N_{el}\, q_{el}^2}{\epsilon_o\, m_{el}\, \omega^2}\left(1 - j\frac{\nu_c}{\omega}\right)^{-1}\right)\vec{E}$$

Hierin wird zur Abkürzung eingeführt die <u>Plasmafrequenz</u> ω_N mittels

$$\omega_N^2 = \frac{N_{el}q_{el}^2}{\epsilon_o\, m_{el}}$$

sodaß

$$\epsilon_r = \epsilon_r^{re} + j\,\epsilon_r^{im} = 1 - \frac{\frac{\omega_N^2}{\omega^2}}{1 - j\frac{\nu_c}{\omega}} = 1 - \frac{\omega_N^2}{\omega^2}\frac{1}{1 + \left(\frac{\nu_c}{\omega}\right)^2} - j\frac{\nu_c}{\omega}\frac{\omega_N^2}{\omega^2}\frac{1}{1 + \left(\frac{\nu_c}{\omega}\right)^2}$$

Die IK dieses Ionosphärenmodells ist gleich eins, wird jedoch, der physikalischen Übersichtlichkeit halber, stets in der Form μ_r ausdrücklich hingeschrieben.

Die folgenden, in der Ionosphärenphysik eingeführten Abkürzungen gehen auf Appleton zurück (Budden, 1961). Man bezeichnet

$$\underline{\frac{\omega_N^2}{\omega^2} = X \quad , \quad \frac{\nu_c}{\omega} = Z \quad , \quad 1 - j\frac{\nu_c}{\omega} = 1 - jZ = U}$$

und erhält für die DK den einfachen Ausdruck

$$\epsilon_r = 1 - \frac{X}{1 - jZ} = 1 - \frac{X}{U}$$

Im praktischen Maßsystem berechnen wir den Zusammenhang zwischen N_{el} und ω_N folgendermaßen:

$$\omega_N^2 = \frac{N_{el} q_{el}^2}{\epsilon_o m_{el}} = \mu_o c^2 \frac{q_{el}}{m_{el}} q_{el} N_{el}$$

$$= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V\,sec}{A\,m} \cdot 9 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{sec^2} \cdot 1{,}76 \cdot 10^{11} \frac{A\,sec}{kg} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ A\,sec \cdot N_{el}$$

$$= (2\pi \cdot 8{,}98\ kHz)^2 \cdot N_{el}\ cm^3$$

3.2 Berechnung des Reflexions- und Durchlaßfaktors

3.2.1 Ansatz

Wir verlegen die x,y-Ebene in die Trennebene (vorher als z = h bezeichnet) zwischen Vakuum und homogen-isotroper Modellionosphäre. Unterhalb der Trennebene z = 0 ist demnach $\epsilon_r = \mu_r = 1$, $\epsilon_r^{im} = 0$. Ein Sender, den wir uns weit unterhalb der Trennebene denken, erzeugt eine Kugelwelle; die Wellenfronten nähern wir in der Umgebung der Trennebene durch Ebenen an, deren Normalvektor $1_{\Phi o}$ gegen die z-Achse um den Winkel $\Theta_{\Phi o}$ geneigt ist. Wir bezeichnen (vgl. Bild 3.1)

$$\cos(\Theta_{\Phi o}) = C_o \quad , \quad \sin(\Theta_{\Phi o}) = S_o$$

und setzen unterhalb z = 0 an

ein TM-Wellenpaar und ein TE-Wellenpaar

$$Z_o \vec{H}_{tmo} = Z_o \vec{H}^{\uparrow}_{tmo} + Z_o \vec{H}^{\downarrow}_{tmo} \qquad \vec{E}_{teo} = \vec{E}^{\uparrow}_{teo} + \vec{E}^{\downarrow}_{teo}$$

$$= 1_y (Z_o H_y) = 1_y (Z_o H^{\uparrow}_{tmo} + Z_o H^{\downarrow}_{tmo}) \qquad = -1_y (-E_y) = -1_y (E^{\uparrow}_{teo} + E^{\downarrow}_{teo})$$

$$= 1_y (Z_o H^{\uparrow}_{\perp o} \exp(-jk_o C_o z) + Z_o H^{\downarrow}_{\perp o} \exp(+jk_o C_o z)) \exp(j\varphi_{xo}) \qquad = -1_y (E^{\uparrow}_{\perp o} \exp(-jk_o C_o z) + E^{\downarrow}_{\perp o} \exp(+jk_o C_o z)) \exp(j\varphi_{xo})$$

$$\text{wobei } \varphi_{x_o} = (\omega t - k_o S_o x)$$

Die Zusammenhänge zwischen Horizontal-Koordinaten und Feldvektor-Beträgen werden

$$\begin{pmatrix} E_x \\ Z_o H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_o & -C_o \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\uparrow}_{tmo} \\ Z_o H^{\downarrow}_{tmo} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Z_o H_x \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_o & -C_o \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E^{\uparrow}_{teo} \\ E^{\downarrow}_{teo} \end{pmatrix}$$

Oberhalb z = 0 ist nur eine aufsteigende Welle zu erwarten. Ihr Wellennormalvektor ist gegen die z-Achse um den Winkel Θ_{Φ} geneigt, für die Richtungscosinus $\cos(\Theta_{\Phi})$ und $\sin(\Theta_{\Phi})$ schreiben wir abgekürzt C und S (wie in 2.3.3) und gelangen oberhalb z = 0 zu folgendem Ansatz:

$$Z_o \vec{H}_{tm} = 1_y Z_o H^{\uparrow}_{tm} \qquad \vec{E}_{te} = -1_y E^{\uparrow}_{te}$$

$$= 1_y Z_o H^{\uparrow}_{\perp} \exp(-jk_o n^c C\, z) \exp(j\varphi_x) \qquad = -1_y E^{\uparrow}_{\perp} \exp(-jk_o n^c C\, z) \exp(j\varphi_x)$$

$$\text{wobei } \varphi_x = (\omega t - k_o n^c S\, x)$$

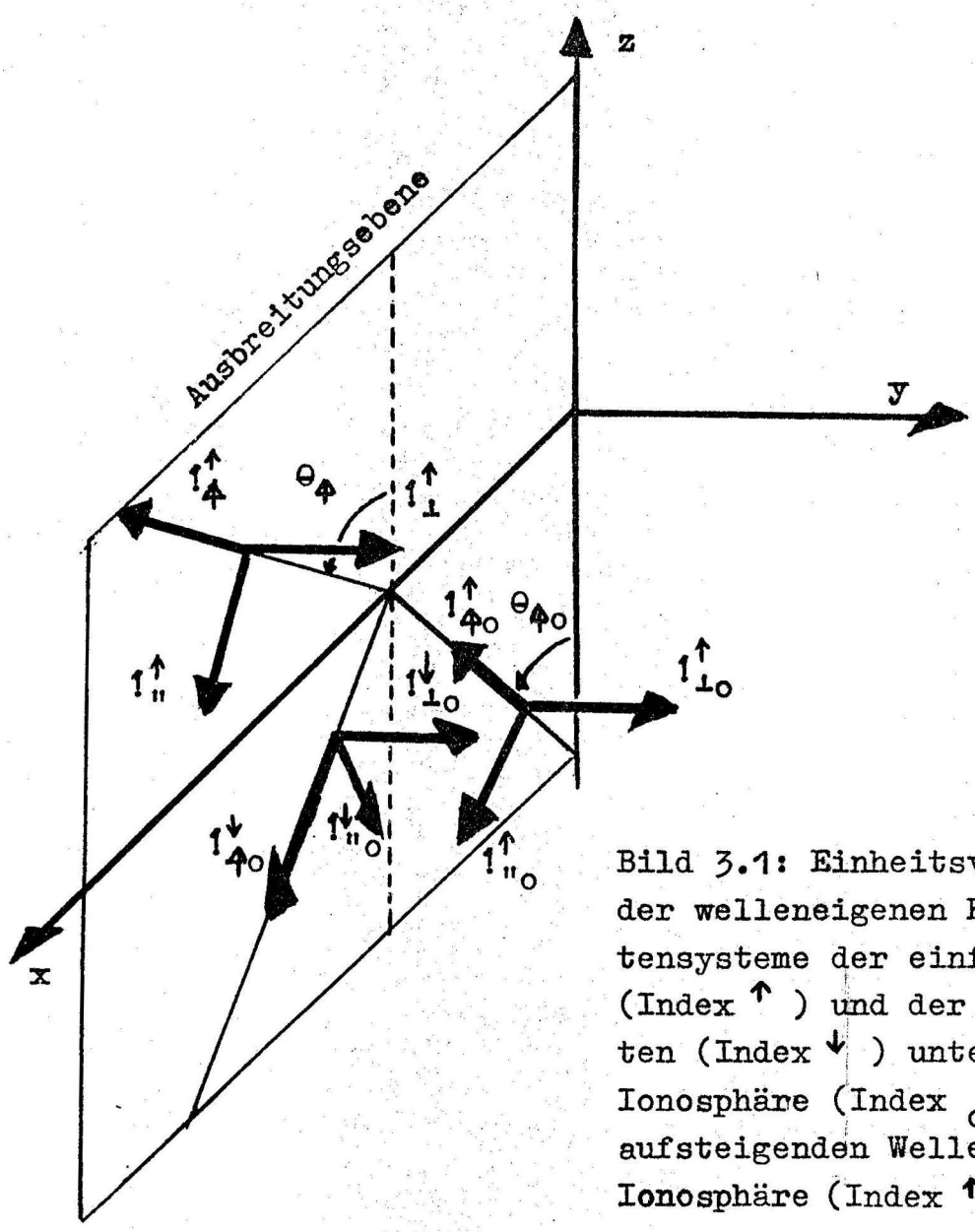


Bild 3.1: Einheitsvektoren der welleneigenen Koordinatensysteme der einfallenden (Index ↑) und der reflektierten (Index ↓) unterhalb der Ionosphäre (Index $_o$), sowie der aufsteigenden Welle in der Ionosphäre (Index ↑).

Die Horizontal-Koordinaten werden jetzt (vgl. 2.3.3)

$$\begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n^cC}{\epsilon_r} & -\frac{n^cC}{\epsilon_r} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_oH_{tm}^{\uparrow} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n^cC}{\epsilon_r} Z_oH_{tm}^{\uparrow} \\ Z_oH_{tm}^{\uparrow} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Z_oH_x \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n^cC}{\mu_r} & -\frac{n^cC}{\mu_r} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{te}^{\uparrow} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n^cC}{\mu_r} E_{te}^{\uparrow} \\ E_{te}^{\uparrow} \end{pmatrix}$$

3.2.2 Der komplexe Wellenvektor in der Ionosphäre

An der Trennfläche z = 0 müssen die Tangentialkomponenten des Wellenpaares im Vakuum und der aufsteigenden Welle in der Modellionosphäre stetig ineinander übergehen. Daraus folgt zunächst die Gleichheit der Exponenten der Ausbreitungsfunktion

$$\varphi_{xo} = (\omega t - k_oS_ox) = \varphi_x = (\omega t - k_on^cS\,x)$$

Hieraus folgt das

$$\underline{\text{Brechnungsgesetz} \quad S_o = n^cS}$$

Da der Brechungsindex in der (leitfähigen) Modellionosphäre komplex ist (vgl. 2.2.2.2), ist das Brechungsgesetz mit reellem S nicht zu erfüllen: Der Wellennormalvektor in der Ionosphäre hat die komplexen Richtungscosinus

$$S = \frac{S_o}{n^c}, \quad C = \sqrt{1 - S^2} = \frac{1}{n^c}\sqrt{(n^c)^2 - S_o^2}$$

Zur Darstellung des komplexen Wellenvektors führen wir die auf <u>Booker</u> zurückgehende Abkürzung

$$\underline{q^c = n^cC = \sqrt{(n^c)^2 - S_o^2} = q^{re} + j\,q^{im}}$$

ein und schreiben ihn in der Form

$$\vec{k} = 1_{ph}\frac{2\pi}{\lambda} - j\,1_{at}\frac{1}{s_{at}} = k_o(1_xn^cS + 1_zn^cC) = k_o(1_xS_o + 1_z(q^{re} + j\,q^{im}))$$

Der Imaginärteil des komplexen Wellenvektors und damit die Dämpfungsnormale zeigt senkrecht von der Trennebene hinweg in die Ionosphäre hinein. Die Ebenen konstanter Amplitude liegen parallel zur xy-Ebene, der Einheitsvektor senkrecht zu den Ebenen konstanter Phase hat die Richtungscosinus S_o und q^{re}.

Drücken wir q^c mit Hilfe der Appleton'schen Parameter aus, so erhalten wir mit $\mu_r = 1$:

$$(q^c)^2 = (n^c)^2 - S_o^2 = \mu_r\epsilon_r - S_o^2 = (1 - \frac{X}{U}) - S_o^2 = C_o^2 - \frac{X}{U}$$

3.2.3 Berechnung von Reflexions- und Durchlaßfaktor

Die Forderung nach Stetigkeit der Tangentialkomponenten lautet ausgeschrieben

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_o & -C_o \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_oH_{tmo}^{\uparrow} \\ Z_oH_{tmo}^{\downarrow} \end{pmatrix}}_{(z = -0)} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q^c}{\epsilon_r} Z_oH_{tm}^{\uparrow} \\ Z_oH_{tm}^{\uparrow} \end{pmatrix}}_{(z = +0)} \qquad \text{für die TM-Welle}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Z_oH_x \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_o & -C_o \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{teo}^{\uparrow} \\ E_{teo}^{\downarrow} \end{pmatrix}}_{(z = -0)} = \underbrace{\begin{pmatrix} Z_oH_x \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q^c}{\mu_r} E_{te}^{\uparrow} \\ E_{te}^{\uparrow} \end{pmatrix}}_{(z = +0)} \qquad \text{für die TE-Welle}$$

Beide Gleichungssysteme haben die gemeinsame Form

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_o & -C_o \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_o^{\uparrow} \\ F_o^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x F^{\uparrow} \\ c_y F^{\uparrow} \end{pmatrix}, \quad c_x = \begin{cases} \frac{q^c}{\epsilon_r} & \text{für TM-Welle} \\ \frac{q^c}{\mu_r} & \text{für TE-Welle} \end{cases}, \quad c_y = 1$$

Für alle z oberhalb der Trennebene ist das Horizontalkoordinaten-Verhältnis

$$L = \frac{c_y}{c_x} = \frac{F_y}{F_x} = \begin{cases} L_{tm} = \frac{\epsilon_r}{q^c} & \text{für TM-Welle} \\ L_{te} = \frac{\mu_r}{q^c} & \text{für TE-Welle} \end{cases}$$

Damit ist z auch unmittelbar unterhalb der Trennebene bekannt und das Verhältnis der abzur aufsteigenden sowie der durchgelassenen zur aufsteigenden Welle läßt sich berechnen. Diese Verhältnisse werden ausgedrückt durch den

Reflexionsfaktor $R = \left(\frac{F_o^{\downarrow}}{F_o^{\uparrow}}\right)_{(z = -0)}$ und den Durchlaßfaktor $D = \left(\frac{F^{\uparrow}}{F_o^{\uparrow}}\right)_{(z = +0)}$.

Zu ihrer Berechnung kehren wir das Gleichungssystem um

$$\begin{pmatrix} F_o^{\uparrow} \\ F_o^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_o^{\uparrow} \\ R\, F_o^{\uparrow} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_o} & 1 \\ \frac{-1}{C_o} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_o} & 1 \\ \frac{-1}{C_o} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ L\, F_x \end{pmatrix}.$$

Hieraus

$$R = \frac{L\, C_o - 1}{L\, C_o + 1} \qquad D = \frac{2\, L\, C_o}{L\, C_o + 1} = 1 + R$$

Speziell

$$R_{tm} = \frac{\frac{\epsilon_r}{q^c}\, C_o - 1}{\frac{\epsilon_r}{q^c}\, C_o + 1} \qquad R_{te} = \frac{\frac{\mu_r}{q^c}\, C_o - 1}{\frac{\mu_r}{q^c}\, C_o + 1}$$

3.3 Diskussion des Reflexionsfaktors

Wir betrachten den Reflexionsfaktor in der Form

$$R = \frac{L\,C_o - 1}{L\,C_o + 1}$$

wobei für TM- bzw. TE-Wellen

$$L_{tm} = \frac{\epsilon_r}{q^c} = \frac{\epsilon_r^{re} + j\epsilon^{im}}{\sqrt{\mu_r(\epsilon_r^{re} + j\epsilon_r^{im}) - S_o^2}}\,, \quad L_{te} = \frac{\mu_r}{q^c} = \frac{\mu_r}{\sqrt{\mu_r(\epsilon_r^{re} + j\epsilon_r^{im}) - S_o^2}}$$

Für metallische Leiter ist

$$\epsilon_r^{im} = -\frac{\sigma_q}{\epsilon_o\,\omega} = \frac{-\omega_\sigma}{\omega}$$

Für unsere Modellionosphäre dagegen ist

$$\epsilon_r^{re} = 1 - \frac{\omega_N^2}{\omega^2 + \nu_c^2}\,, \qquad \epsilon_r^{im} = -\frac{\nu_c}{\omega}\,\frac{\omega_N^2}{\omega^2 + \nu_c^2}$$

Wir interessieren uns für Wellen niedriger Frequenzen, welche in niedrigen Höhen, also im Bereich großer Stoßzahlen und kleiner Elektronendichten, reflektiert werden. Dann darf ω neben ν_c vernachlässigt werden, wir erhalten näherungsweise

$$\epsilon_r^{re} \cong 1 - \frac{\omega_N^2}{\nu_c^2} \cong 1\,, \qquad \epsilon_r^{im} = -\frac{\omega_N^2}{\omega\,\nu_c} = -\frac{\omega_\sigma}{\omega}$$

mit $\omega_\sigma = \frac{\omega_N^2}{\nu_c}$, Außerdem ist für die Ionosphäre $\mu_r = 1$.

Eine weitere Vereinfachung unserer Diskussion rührt daher, daß wir an Ausbreitungseffekten über lange Ausbreitungswege interessiert sind. In diesen Situationen haben wir nahezu streifend einfallende Wellen, der cosinus C_o ist sehr klein, S_o ist nahezu 1. Aus diesen Gründen können wir die wichtigsten Eigenschaften der Reflexionsfaktoren bereits verstehen, wenn wir sie unter zwei vereinfachenden Annahmen diskutieren:

1. Die Abhängigkeit von L vom Einfallswinkel, und damit von S_o wird vernachlässigt,
2. der Realteil von ϵ_r wird gegenüber dem Imaginärteil vernachlässigt.

Die Ionosphäre wird also wie ein metallischer Reflektor angenähert. Wir erhalten

$$L_{tm} \cong \frac{1 - j\frac{\omega_\sigma}{\omega}}{\sqrt{1 - j\frac{\omega_\sigma}{\omega} - S_o^2}} \cong \sqrt{-j\frac{\omega_\sigma}{\omega}} = \sqrt{\frac{\omega_\sigma}{\omega}}\,\frac{1-j}{\sqrt{2}}\,,$$

$$L_{te} \cong \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\omega_\sigma}{\omega} - S_o^2}} \cong \sqrt{j\frac{\omega}{\omega_\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_\sigma}}\,\frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

Bei großer, ionosphärischer Leitfähigkeit ist also

$$\underline{|L_{tm}| \gg 1} \qquad \text{und} \qquad \underline{|L_{te}| \ll 1}\,.$$

3.3.1 Der TE-Reflexionsfaktor

Das Horizontalkomponenten-Verhältnis L_{te} wird durch einen Zeiger mit einem Betrag $\ll 1$ abgebildet, der, unter ungefähr 45° Neigung gegen die x-Achse, in den ersten Quadranten zeigt (Bild 3.2). Demnach liegt der Nenner $(L_{te}C_o + 1)$ ebenfalls im ersten, der Zähler $(L_{te}C_o - 1)$ dagegen im zweiten Quadranten. Für $C_o = 0$ ist der Zähler -1, der Nenner +1. Der Skizze Bild 3.2 entnehmen wir qualitativ, in welcher Weise der Winkel des Zählers vom Anfangswert 180° abnimmt, der Winkel des Nenners vom Anfangswert 0° zunimmt, wenn C_o von 0 ($\Theta_{4o} = 90^o$) auf 1 ($\Theta_{4o} = 0^o$) anwächst.

Je kleiner $|L_{te}|$, desto weniger entfernt sich beim Übergang von $C_o = 0$ auf $C_o = 1$ die Winkeldifferenz zwischen Zähler und Nenner von ihrem Anfangswert 180°, desto weniger entfernt sich das Verhältnis der Beträge von Zähler und Nenner von seinem Anfangswert 1.

Der TE-Reflexionsfaktor läßt sich daher in allen, uns hier interessierenden Fällen ausgezeichnet durch eine exponentielle Näherung erfassen: wir nutzen die bekannte Reihenentwicklung

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \dots\right)$$

aus, um für kleines $|L_{te}|\,C_o$ näherungsweise zu schreiben

$$R_{te} = \frac{L_{te}C_o - 1}{L_{te}C_o + 1} = -\exp\left(-2\left(L_{te}C_o + \frac{1}{3}(L_{te}C_o)^3 + \dots\right)\right) \cong -\exp(-2\,L_{te}C_o)$$

Wenn $\left|\frac{1}{3}(L_{te}C_o)^2\right| \ll 1$, dann darf die Reihe in der Klammer nach dem ersten Gliede abgebrochen werden, was in den meisten Fällen erlaubt ist.

3.3.2 Der TM-Reflexionsfaktor

Für TM-Wellen wird L_{tm} durch einen Zeiger im vierten Quadranten mit einem Betrag > 1 dargestellt (Bild 3.3). Für $C_o = 0$ ist auch hier der Nenner +1, der Zähler -1. Bild 3.3 zeigt, wie der Winkel des Zählers von seinem Anfangswert -180° aus zunimmt, der Winkel des Nenners von seinem Anfangswert 0° aus abnimmt, wenn C_o von 0 auf 1 anwächst. Wir entnehmen dem Bild 3.3 weiterhin, daß hierbei

der Betrag des Nenners monoton anwächst,
der Betrag des Zählers dagegen ein Minimum durchläuft, wenn der Zähler-Zeiger senkrecht auf der Geraden $L_{tm}\,t - 1$ $(-\infty < t < +\infty)$ steht.

Zwischen $C_o = 0$ und $C_o = 1$ existiert also irgendwo ein Wert, für den der Betrag des TM-Reflexionsfaktors ein Minimum durchläuft. Diesen Wert können wir durch Trennung von Real- und Imaginärteil finden: (Den Index $_{tm}$ lassen wir bei den folgenden Ableitungen fort)

$$R = \frac{(L^{re} + jL^{im})\,C_o - 1}{(L^{re} + jL^{im})\,C_o + 1} = \frac{((L^{re}C_o - 1) + jL^{im}C_o)((L^{re}C_o + 1) - jL^{im}C_o)}{(L^{re}C_o + 1)^2 + (L^{im}C_o)^2}$$

$$= \frac{(|L|^2\,C_o^2 - 1) + 2\,jL^{im}C_o}{(|L|^2\,C_o^2 + 1) + 2\,L^{re}C_o}\,.$$

Der Betrag dieses Ausdruckes durchläuft ein Minimum, wenn der Einfallswinkel Θ_{4o} den Wert des <u>Brewster-Winkels</u> Θ_{4br}, sein cosinus den entsprechenden Wert C_{br} durchläuft:

$$C_{br} = \frac{1}{|L|}$$

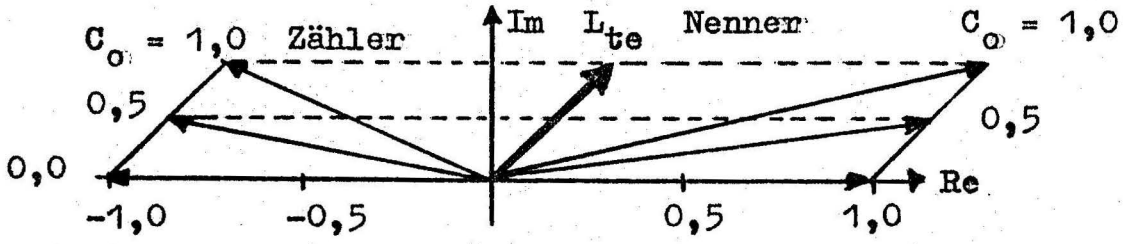


Bild 3.2: Zeigerdarstellung von Zähler und Nenner des Reflexionsfaktors für TE-Wellen

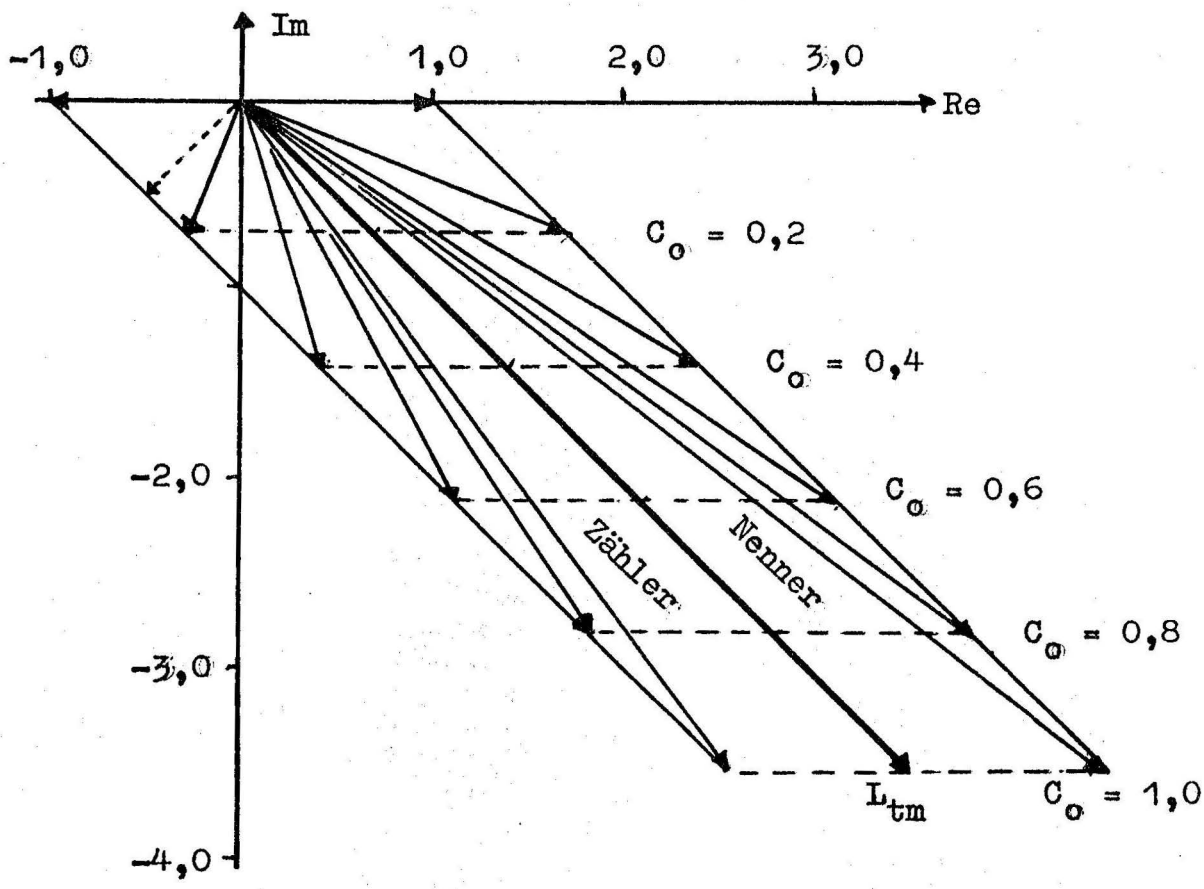


Bild 3.3: Zeigerdarstellung von Zähler und Nenner des Reflexionsfaktors für TM-Wellen

In diesem Falle ist

$$R(C_{br}) = R_{min} = j\,\frac{L^{im}C_{br}}{1 + L^{re}C_{br}} = j\,\frac{\frac{L^{im}}{|L|}}{1 + \frac{L^{re}}{|L|}} = j\,\frac{\sqrt{1 - \frac{(L^{re})^2}{|L|^2}}}{1 + \frac{L^{re}}{|L|}} = j\sqrt{\frac{1 - \frac{L^{re}}{|L|}}{1 + \frac{L^{re}}{|L|}}}$$

In der Näherung $\omega_\sigma \gg \omega$ (vgl. S. 3-5) ist $L^{re}_{tm} = -L^{im}_{tm} = \sqrt{\frac{\omega_\sigma}{\omega}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$, und daher

$$R(C_{br}) \simeq j\sqrt{\frac{1 - 1/\sqrt{2}}{1 + 1/\sqrt{2}}} = j\cdot 0{,}4142\,..$$

Bei der Diskussion des TM-Reflexionsfaktors sind demzufolge drei Bereiche zu unterscheiden:

$$C_o < C_{br}\ ,\quad C_o \approx C_{br}\ ,\quad C_o > C_{br}$$

Im folgenden diskutieren wir Näherungen für den Reflexionsfaktor in diesen drei Bereichen.

3.3.2.1 Dielektrische Näherung (Schrägeinfallsnäherung)

Bei nahezu streifendem Einfall ist $\Theta_{40} \approx 90^o$, $C_o \approx 0$ ist so klein daß $C_o \ll C_{br}$.

In diesem Falle kann der Reflexionsfaktor genauso angenähert werden wie für TE-Wellen:

$$R^{(obl)}_{tm} \simeq -\exp(-2\,L_{tm}\,C_o) = \exp(-2\,L^{re}_{tm}\,C_o)\,\exp(-j(2\,L^{im}_{tm}\,C_o + \pi))$$

Anhand der Näherung $\omega_\sigma \gg \omega$ (S. 3 - 5) erkennen wir, daß $L^{im}_{tm} < 0$, $L^{re}_{tm} > 0$.

Daher ist die Phase , aufgetragen als Funktion von C_o , eine vom Anfangswert $-\pi$ aufsteigende Gerade mit der Steigung $2|L^{im}_{tm}|$.

Der Logarithmus des Reflexionsfaktor-Betrages hingegen wird dargestellt durch eine mit der Steigung $|-2\,L^{re}_{tm}|$ vom Anfangswert 0 aus abfallende Gerade (Bild 3.4)

Die Angabe einer Phasenkurve für den Reflexionsfaktor beruht auf der stillschweigend gemachten Annahme, daß die Trennebene zwischen Vakuum und leitender Modell-Ionosphäre als Bezugsebene anzusehen sei. Ersetzen wir diese Bezugsebene durch eine dazu parallele in der Höhe $h' = h - \Delta h$ (h = Höhe der Trennebene, s. S. 3 - 1), so wird der darauf bezogene Reflexionsfaktor (Index $_{tm}$ weggelassen)

$$R(C_o, h - \Delta h) = |R(C_o,h)|\cdot\exp(j\phi_R(C_o))\cdot\exp(-j\,2k_o\Delta h\,C_o) \quad \text{(Bild 3.5)}$$

$$= \exp(-2\,L^{re}C_o)\,\exp(-j(2\,L^{im}C_o + \pi))\,\exp(-j\,2k_o\Delta h\,C_o)$$

$$= \exp(-2\,L^{re}C_o)\,\exp(-j(2(L^{im} + k_o\Delta h)C_o + \pi))$$

Wählen wir nun die Bezugsebene in der Höhe

$$h' = h - \Delta h = h + \frac{L^{im}}{k_o}$$

so ist der darauf bezogene Reflexionsfaktor in erster Näherung reell:

$$R(C_o,h') = \exp(-2L^{re}C_o)\,\exp(-j\pi) = -\exp(-2\,L^{re}C_o)$$

Diese Näherung spielt für das Verständnis der mode-Eigenwerte im Erde-Ionosphäre-Wellenleiter eine entscheidende Rolle.

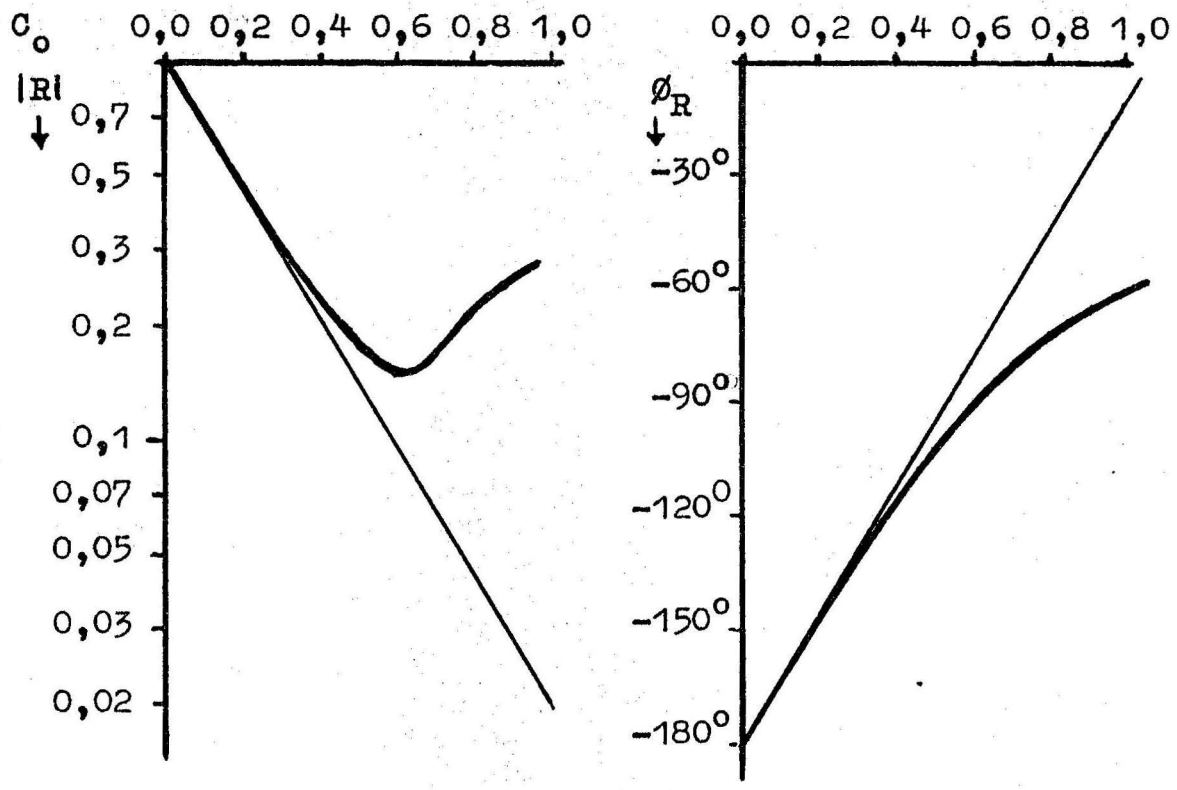


Bild 3.4: Typischer Verlauf von Betrag |R| und Phase ϕ_R eines TM-Reflexionsfaktors als Funktion des Cosinus C_o des Einfallswinkels. Gerade Linien geben den Verlauf der Schrägeinfallsnäherung wieder.

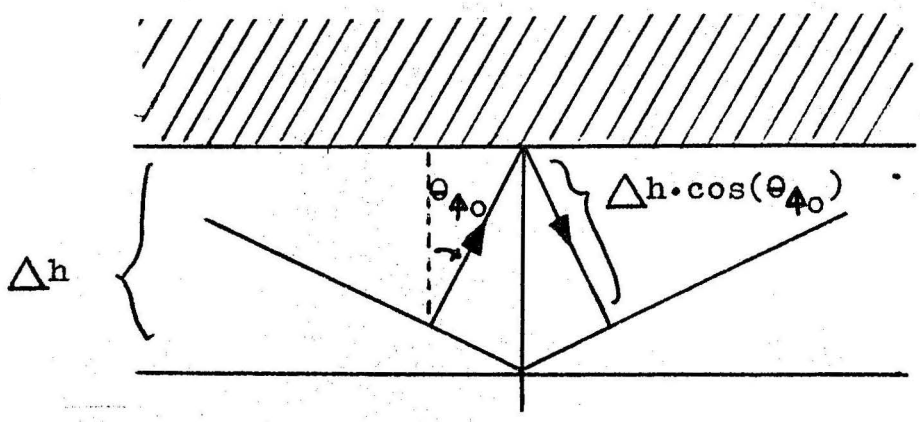


Bild 3.5: Bezugsebenenwechsel für die Angabe der Phase des Reflexionsfaktors

3.3.2.2 Metallische Näherung (Steileinfallsnäherung)

Falls $C_o \gg C_{br} = \frac{1}{|L_{tm}|}$, so ist der Reflexionsfaktor zweckmäßigerweise folgendermaßen zu schreiben:

$$R_{tm} = \frac{1 - \frac{1}{L_{tm} C_o}}{1 + \frac{1}{L_{tm} C_o}}$$

und die in 3.3.1 benutzte Näherungsformel führt auf folgende exponentielle Näherung:

$$R_{tm}^{(met)} = \exp(-2 \frac{1}{L_{tm} C_o}) = \exp(- \frac{2 L^{re}}{|L|^2 C_o}) \exp(+j \frac{2 L^{im}}{|L|^2 C_o})$$

In der Näherung $\omega_\sigma \gg \omega$ sind sowohl der Logarithmus des Betrages als auch die Phase Hyperbeln in der negativen Halbebene (Bild 3.6).

Während die Schrägeinfallsnäherung zur Darstellung der ionosphärischen Reflexion geeignet ist, gibt die hier beschriebene metallische Näherung das Reflexionsverhalten der Erde langen Wellen gegenüber sehr gut wieder. Bei sehr hoher Leitfähigkeit wird der Gültigkeitsbereich der Schrägeinfallsnäherung auf einen sehr kleinen Winkelbereich nahe 90° eingeschränkt, und die metallische Näherung gilt mit guter Näherung für den gesamten Bereich praktisch vorkommender Einfallswinkel.

3.3.2.3 Brewsterwinkel-Näherung

Mit dieser Näherung erfassen wir den Übergangsbereich zwischen den Gültigkeitsbereichen der dielektrischen und der metallischen Näherung: $C_o \approx C_{br}$

Die Gerade $\ln(|R_{tm}^{(obl)}|) = -2 L_{tm}^{re} C_o$ schneidet die

Hyperbel $\ln(|R_{tm}^{(met)}|) = \frac{-2 L_{tm}^{re}}{|L_{tm}|^2 C_o}$ bei $C_o = C_{br} = \frac{1}{|L_{tm}|}$, wo

$$\ln(|R_{tm}^{(met)}|) = \ln(|R_{tm}^{(obl)}|) = - \frac{2 L_{tm}^{re}}{|L_{tm}|} \quad \text{(Bild 3.7)}$$

In der Näherung $\omega_\sigma \gg \omega$ ist das gleich $- \frac{2}{\sqrt{2}} = -1{,}4 .. = \ln(0{,}247..)$ statt $\ln(0{,}414..)$, wie auf S. 3 - 7 (oben) gefunden.

Die Gerade $\phi_{Rtm}^{(obl)} = -2 L_{tm}^{im} C_o - \pi$ schneidet die

Hyperbel $\phi_{Rtm}^{(met)} = \frac{2 L_{tm}^{im}}{|L_{tm}|^2 C_o}$ in zwei Punkten mit den Abscissen C_X, wobei

$$L_{tm}^{im} C_X^2 + \frac{\pi}{2} C_X + \frac{L_{tm}^{im}}{|L_{tm}|^2} = 0 \quad , \quad C_{X1,2} = - \frac{\pi}{4} \frac{1}{L_{tm}^{im}} \mp \sqrt{(\frac{\pi}{4 L_{tm}^{im}})^2 - \frac{1}{|L_{tm}|^2}}$$

Die Schnittpunkte existieren nur, wenn $\frac{\pi}{4} = 0{,}785... > \frac{L_{tm}^{im}}{|L_{tm}|}$. In der Näherung $\omega_\sigma \gg \omega$ ist $L_{tm}^{im}/|L_{tm}| = 1/\sqrt{2} = 0{,}707..$, sodaß die Bedingung erfüllt ist.

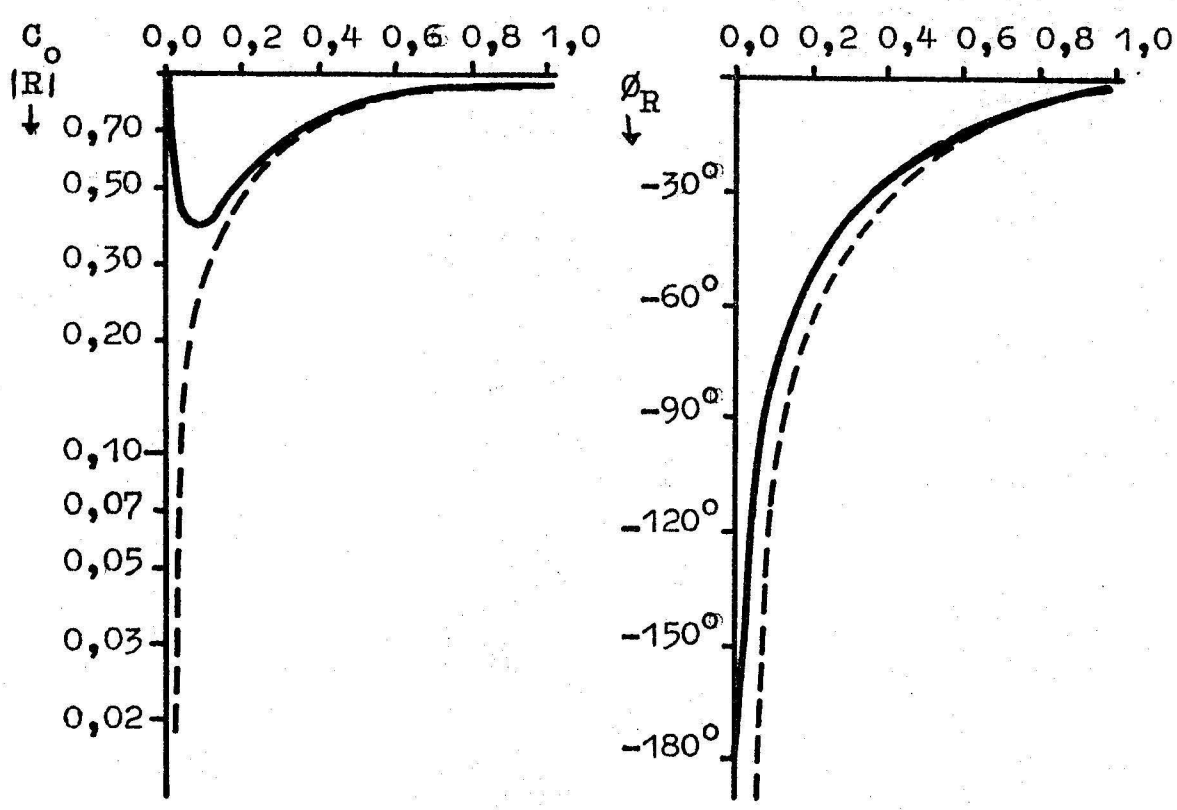


Bild 3.6 Verlauf von Betrag R und Phase ϕ_R des TM-Reflexionsfaktors bei großer Leitfähigkeit und der zugehörigen Steil-einfallsnäherung (gestrichelt).

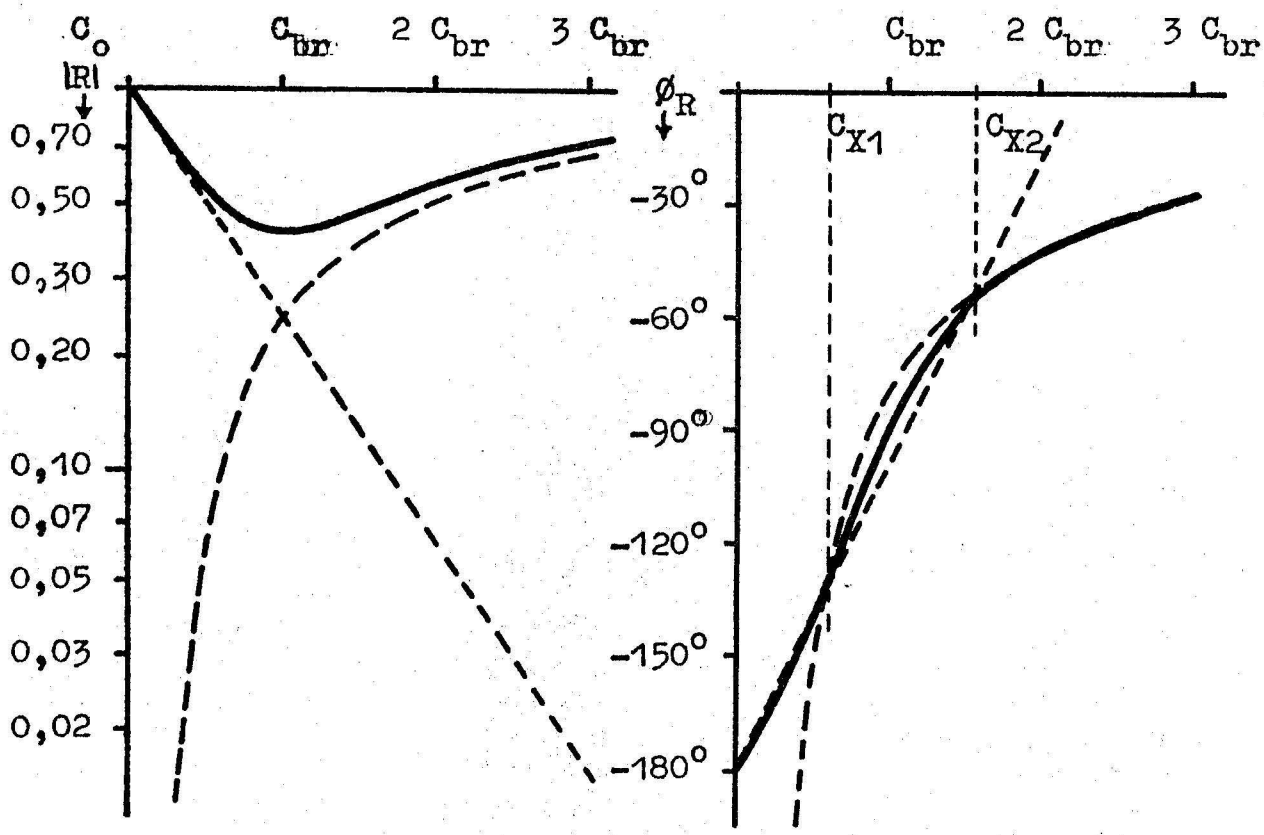


Bild 3.7 Schematische Darstellung des Überganges von der Schrägeinfallsnäherung zur Steileinfallsnäherung (C_{br} = Cosinus des Brewsterwinkels)

Im Bereich $C_{x1} \leq C_o \leq C_{x2}$ können wir nun den Verlauf der Phasenkurve sehr gut dadurch annähern, daß wir das arithmetische Mittel aus der dielektrischen und der metallischen Näherung bilden:

$$\phi_{Rtm}^{(br)} = \frac{1}{2}(\phi_{Rtm}^{(obl)} + \phi_{Rtm}^{(met)}) = -\frac{\pi}{2} - L_{tm}^{im} C_o + \frac{L_{tm}^{im}}{|L_{tm}|^2 C_o}$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{L_{tm}^{im}}{|L_{tm}|}\left(|L_{tm}|C_o - \frac{1}{|L_{tm}|C_o}\right)$$

Zur Berechnung des Reflexionsfaktor-Betrages gehen wir aus von (Index $_{tm}$ weggelassen)

$$R = \frac{(L^{re} + jL^{im})\, C_o - 1}{(L^{re} + jL^{im})\, C_o + 1}, \quad |R|^2 = \frac{|L|^2 C_o^2 + 1 - 2\, L^{re} C_o}{|L|^2 C_o^2 + 1 + 2\, L^{re} C_o}$$

Diesen Ausdruck schreiben wir für $C_o \approx C_{br} = {}^1/_{|L|}$ zweckmäßigerweise folgendermaßen um

$$|R|^2 = \frac{(|L|C_o - 1)^2 + 2|L|C_o - 2\, L^{re} C_o}{(|L|C_o - 1)^2 + 2|L|C_o + 2\, L^{re} C_o} = \frac{(|L|C_o - 1)^2 + (1 - \frac{L^{re}}{|L|})\, 2|L|C_o}{(|L|C_o - 1)^2 + (1 + \frac{L^{re}}{|L|})\, 2|L|C_o}$$

$$= \frac{1 - \frac{L^{re}}{|L|}}{1 + \frac{L^{re}}{|L|}} \; \frac{1 - \frac{(|L|C_o - 1)^2}{2|L|C_o(1 - \frac{L^{re}}{|L|})}}{1 + \frac{(|L|C_o - 1)^2}{2|L|C_o(1 + \frac{L^{re}}{|L|})}}$$

Das erste Glied der Taylorentwicklung von $\ln(\frac{1 + az}{1 + bz})$ lautet $(a - b)\, z$, damit finden wir folgende Näherung

$$|R|^2 = \frac{1 - \frac{L^{re}}{|L|}}{1 + \frac{L^{re}}{|L|}} \exp\left(\left(\frac{1}{1 - \frac{L^{re}}{|L|}} - \frac{1}{1 + \frac{L^{re}}{|L|}}\right)\frac{(|L|C_o - 1)^2}{2|L|C_o}\right)$$

$$= \frac{1 - \frac{L^{re}}{|L|}}{1 + \frac{L^{re}}{|L|}} \exp\left(\left(\frac{\frac{L^{re}}{|L|}}{1 - (\frac{L^{re}}{|L|})^2}\right)\left(|L|C_o + \frac{1}{|L|C_o} - 2\right)\right)$$

Für $C_o = C_{br} = {}^1/_{|L|}$ finden wir für die Phase den Wert $-\frac{\pi}{2}$, für den Betrag den Wert den wir bereits auf Seite 3 - 7 für den Brewster-Winkel gefunden hatten.

Abschließend fassen wir (in Tabelle 3.1) die verschiedenen Näherungen für den Verlauf des Reflexionsfaktors als Funktion von C_o noch einmal in einer Übersicht zusammen. Unsere Brewsterwinkel-Näherung hat gegenüber der von Volland (1964 b, 1968) vorgeschlagenen den Vorteil, daß sie, genau wie die dielektrische und die metallische Näherung, elementare Lösungen der mode-Eigenwert-Gleichung für ebene Modelle des Erde-Ionosphäre-Wellenleiters ermöglicht.

Deutlich geht aus unserer Übersicht hervor, welche Bedeutung das Horizontalkomponenten-Verhältnis für das physikalische Verständnis des Reflexionsfaktors hat.

Tabelle 3.1: Näherungen für den Reflexionsfaktor

	$\ln\lvert R\rvert$	ϕ_R
TE-Reflexions-faktor	$-2\, L_{te}^{re}\, C_o$	$-2\, L_{te}^{im}\, C_o + \pi$
TM-Reflexions-faktor, diel.	$-2\, L_{tm}^{re}\, C_o$	$-2\, L_{tm}^{im}\, C_o - \pi$
TM-Reflexionsfaktor, Brewsterwinkel-Bereich	$\left(\frac{\frac{1}{2}\frac{L_{tm}^{re}}{\lvert L_{tm}\rvert}}{1-\left(\frac{L_{tm}^{re}}{\lvert L_{tm}\rvert}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lvert L_{tm}\rvert C_o} + \lvert L_{tm}\rvert C_o - 2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\frac{L_{tm}^{re}}{\lvert L_{tm}\rvert}}{1+\frac{L_{tm}^{re}}{\lvert L_{tm}\rvert}}\right)$	$\frac{L_{tm}^{im}}{\lvert L_{tm}\rvert}\left(\frac{1}{\lvert L_{tm}\rvert C_o} - \lvert L_{tm}\rvert C_o\right) - \frac{\pi}{2}$
TM-Reflexionsfaktor, metallisch	$\frac{-2\, L_{tm}^{re}}{\lvert L_{tm}\rvert^2 C_o}$	$\frac{2\, L_{tm}^{im}}{\lvert L_{tm}\rvert^2 C_o}$

Eine anschauliche Übersicht über die C_o-Abhängigkeit des Reflexionsfaktors vermittelt uns die konforme Abbildung

$$w = \lvert w\rvert e^{j\varphi_w} = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{1+z}$$

(Dahms, 1958). Die Linien $\lvert w\rvert$ = const sind Kreise, deren Mittelpunkte für $\lvert w\rvert < 1$ auf der positiven, reellen Achse liegen, und deren Radien mit abnehmendem $\lvert w\rvert$ abnehmen. Für $\lvert w\rvert \to 0$ schrumpft der Kreis $\lvert w\rvert$ = const zu dem Punkt +1 zusammen. Die Kurven φ_w = const sind ebenfalls Kreise, deren Mittelpunkte auf der imaginären Achse liegen.

Eine für unsere Diskussion des Reflexionsfaktors gut geeignete Darstellung gibt Bild 3.8. Der Betrag $\lvert w\rvert$ wird in dB (bezogen auf 0 dB = 1) angegeben. Um die C_o-Abhängigkeit von Betrag $\lvert R\rvert$ und Phase ϕ_R des Reflexionfaktors mit einem Blick zu übersehen, brauchen wir nur die Größe L als Zeiger in dieses Diagramm einzuzeichnen. Lassen wir dann C_o schrittweise von 1,0 auf 0,0 abnehmen, so wandert der Punkt $z = L\, C_o$ in entsprechenden Schritten vom Zeiger-Endpunkt zum Nullpunkt, und wir können die zugehörigen Werte von $\lvert R\rvert$ und ϕ_R direkt aus dem Diagramm ablesen.

Unsere Diskussion beschränkte sich der Einfachheit halber auf große Leitfähigkeitswerte, also metallische Reflexion. Dielektrische Reflexion kann man qualitativ überblicken, in dem man sich den L-Zeiger mehr zur reellen Achse hin gedreht denkt. Im Falle verlustfreier, dielektrischer Reflexion liegt der L-Zeiger auf der reellen Achse, der Punkt $L\, C_o$ durch-läuft bei einem bestimmten C_o-Wert die Singularität des Diagramms bei $z = +1$. Hier erkennen wir wieder das aus der elementaren Optik bekannte Brewster-Winkel-Verhalten des Reflexionsfaktors.

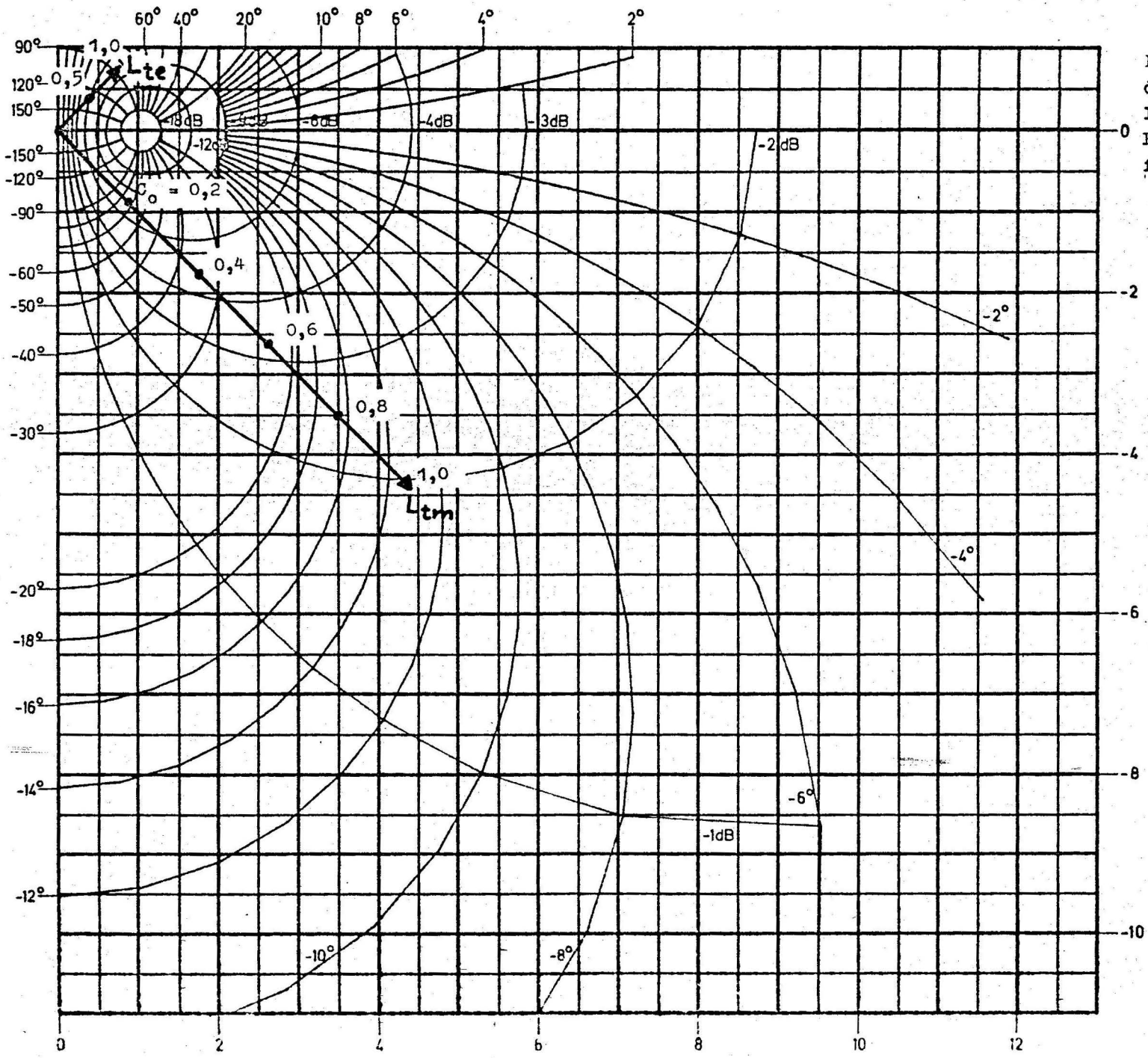


Bild 3.8: Kreisdiagramm zur Ermittlung von Betrag und Phase des Reflexionsfaktors aus $z = L\,C_o$

4. Reflexion an isotropen, inhomogenen Modell-Ionosphären

4.1 Höhenabhängigkeit der physikalischen Ionosphären-Parameter

4.1.1 Höhenabhängigkeit der Elektronenproduktion

Die physikalischen Mängel eines homogenen Ionosphärenmodells mit sprunghaftem Anwachsen der Elektronendichte in der "Reflexionshöhe" h liegen auf der Hand. Ein physikalisches Modell, welches wirkliche Elektronendichte-Profile in begrenzten Höhenbereichen befriedigend anzunähern vermag, ist die "Chapman-Schicht" (s. z.B. Rawer, 1953). Diesem Modell liegen folgende, vereinfachende Vorstellungen zugrunde:

a) Die Elektronen werden durch eine monochromatische, ionisierende Strahlung von den Luftmolekülen abgespalten. Die Energiestromdichte der einfallenden Strahlung (oberhalb der Ionosphäre!) bezeichnen wir mit $J_{W,\infty}^{(ion)}$, ihren Neigungswinkel gegen die Vertikale mit χ.

b) Die Atmosphäre besteht aus einer einzigen Molekülsorte. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Molekül von einem Lichtquantum der ionisierenden Strahlung getroffen wird, wird durch seinen Absorptionsquerschnitt $\hat{s}_{abs}$ beschrieben. Die mittlere Ionisierungs-Energie für ein Luftmolekül, δW_{ion}, wird in der Literatur mit 35 eV angegeben (Nicolet and Aikin, 1960).

c) Die Temperatur der Atmosphäre wird durch einen höhenunabhängigen Mittelwert T_{abs} angenähert, sodaß die Molekülzahl-Dichte N_{mol} von der Höhe z gemäß der barometrischen Höhenformel abhängt

$$N_{mol}(z) = N_{mol,o} \exp(-\frac{z}{H_s})$$

Hierin hängt die "Skalenhöhe" H_s mit der mittleren Temperatur T_{abs} folgendermaßen zusammen:

$$H_s = \frac{R_{gas} T_{abs}}{\bar{g}_{grav}} \quad \text{wobei } R_{gas} = \frac{8{,}317 \text{ Wattsec}}{\text{Mol} \cdot \text{Grad}}, \; \bar{g}_{grav} = 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$1 \text{ Mol} = \frac{\text{Molekülmasse} \cdot 1 \text{ gr}}{\frac{1}{16} \text{ Sauerstoff-Atommasse}} = 28{,}95 \text{ gr für Luft}$$

Am Erdboden ist H_s etwa gleich 8 km. Zur Beschreibung der D-Schicht muß man einen niedrigeren Temperatur-Mittelwert und dementsprechend eine kleinere Skalenhöhe einsetzen (ungefähr 6 bis 7 km).

Legt man dieses stark vereinfachte Modell der Atmosphäre und der einfallenden Strahlung zugrunde, so gelangt man zu folgender Abhängigkeit der Elektronen-Produktionsrate von der Höhe z (s. Budden, 1961a, sec. 1.5) :

$$Q_{el}^{(+)}(z) = Q_m \exp(1 - \frac{z - z_m}{H_s} - \exp(-\frac{z - z_m}{H_s})) \;, \quad \text{wobei}$$

z_m = Höhe mit der größten Produktionsrate (Q_m) $= H_s \ln(\frac{N_{mol,o} \hat{s}_{abs} H_s}{\cos(\chi)})$

$= H_s (\ln(N_{mol,o} \hat{s}_{abs} H_s) - \ln(\cos(\chi)) \quad = z_{mo} - H_s \ln(\cos(\chi))$

Q_m = maximale Produktionsrate $= \frac{J_{W,\infty}^{(ion)} \cos(\chi)}{\delta W_{ion} H_s e}$ (e = 2,718...)

4.1.2 Modellfunktionen für Elektronendichte-Profile

Der Wert der Elektronendichte N_{el} ergibt sich als Gleichgewicht aus der Elektronenproduktions- und -Verlustrate. Für die Elektronenverluste betrachten wir, in Anlehnung an Volland (1961, 1964c), zwei einfache Prozesse, die zur näherungsweisen Beschreibung der tatsächlich ablaufenden Prozesse geeignet sind:

1. Rekombination : Hiermit nähern wir die Elektronenverlust-Prozesse in der hohen Atmosphäre an, wo die Luftmoleküle zu einem hohen Prozentsatz ionisiert sind, und wo, der geringen Luft-dichte wegen, die Wahrscheinlichkeit für den Zusammenstoß zwischen einem freien Elektron und einem neutralen Luftmolekül gering ist (vgl. hierzu die Angaben über die Atmosphäre im Fischer-Lexikon "Geophysik", Hrsg. J. Bartels). Die Verlustrate ist dann proportional der Dichte freier Elektronen und der Dichte ionisierter Moleküle, N_{ion} . Die letztere jedoch ist ungefähr der Elektronendichte gleichzusetzen. Damit erhalten wir folgenden, näherungsweisen Ausdruck für die Elektronenverlustrate:

$$\left(\frac{dN_{el}}{dt}\right)^{(-)} = -\alpha_{rec}\, N_{el}\, N_{ion} = -\alpha_{rec}\, (N_{el})^2$$

Der Proportionalitätsfaktor α_{rec} heißt "Rekombinationskoeffizient".

2. Anlagerung (attachment): Mit diesem Prozeß nähern wir die Elektronen-Verluste in der tiefen Ionosphäre an, wo der Ionisationsgrad gering und die Luftdichte so groß ist, daß die freien Elektronen häufig mit neutralen Molekülen zusammenstoßen. Die Verlustrate ist proportional der Dichte N_{el} freier Elektronen und der Dichte N_{mol} neutraler Moleküle:

$$\left(\frac{dN_{el}}{dt}\right)^{(-)} = -\alpha_{att}\, N_{el}\, N_{mol}$$

Der Proportionalitätsfaktor α_{att} heißt "Anlagerungskoeffizient". (N.B.: Unser α_{att} unterscheidet sich von Volland's β (Volland 1961, 1964c) durch den Faktor N_{mol} . Unsere Schreibweise entspricht der von Rawer (1953).)

Im Gleichgewichts-Zustand ist

$$\frac{dN_{el}}{dt} = \left(\frac{dN_{el}}{dt}\right)^{(-)} + Q_{el}^{(+)} = 0 \,, \qquad \text{hieraus folgt}$$

für Rekombination

$$N_{el}(z) = \sqrt{\frac{Q_{el}^{(+)}(z)}{\alpha_{rec}}} =$$

$$\sqrt{\frac{Q_m}{\alpha_{rec}}}\, \exp\left(\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{z - z_m}{H_s} - \exp\left(-\frac{z - z_m}{H_s}\right)\right)\right)$$

Hierin setzt Volland (l.c.) als Höhenabhängigkeit des Rekombinationskoeffizienten

$$\alpha_{rec}(z) = \alpha_{rec,m}\, \exp\left(-\frac{z - z_m}{H_s}\right)$$

und erhält

$$N_{el}(z) = N_m\, \exp\left(\tfrac{1}{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{z - z_m}{H_s}\right)\right)\right)$$

$$\text{mit } N_m = \left(\frac{Q_m}{\alpha_{rec,m}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

für Anlagerung

$$N_{el}(z) = \frac{Q_{el}^{(+)}(z)}{N_{mol}\, \alpha_{att}} =$$

$$\frac{Q_m}{N_{mol}\alpha_{att}}\, \exp\left(1 - \frac{z - z_m}{H_s} - \exp\left(-\frac{z - z_m}{H_s}\right)\right)$$

Hierin schreiben wir die barometrische Höhenformel für N_{mol} in der Form

$$N_{mol}(z) = N_{mol,o}\, \exp\left(\frac{-z}{H_s}\right) = N_{mol,m}\, \exp\left(-\frac{z - z_m}{H_s}\right)$$

und erhalten

$$N_{el}(z) = N_m\, \exp\left(1 - \exp\left(-\frac{z - z_m}{H_s}\right)\right)$$

$$\text{mit } N_m = \frac{Q_m}{N_{mol,m}\, \alpha_{att}}$$

Beide Modellfunktionen nähern sich für große z einem konstanten Wert ($N_m \sqrt{e}$ bzw. N_m e) und sind daher nur für die tiefe Ionosphäre als Näherung zu brauchen.

Eine Abnahme der Elektronendichte mit der Höhe, wie sie oberhalb der Schichtmaxima auftritt, kann nur dadurch nachgebildet werden, daß

entweder α_{rec} weniger schnell mit der Höhe abnimmt als in Volland's Modell,
oder α_{att} mit der Höhe zunimmt.

4.1.3 Vergleich mit den Modellfunktionen von Wait und Walters

Wait und Walters (1963) legten ihren Reflexionsfaktor-Berechnungen ein Modell zugrunde, in dem die Elektronendichte exponentiell mit der Höhe ansteigt. Die auf diesem Modell basierenden, umfangreichen numerischen Berechnungen von Wait und Spies (1964) werden bis auf den heutigen Tag zur Interpretation von Längstwellen-Beobachtungen verwendet. Daher ist es lohnend, die im vorigen Abschnitt behandelten Modellfunktionen mit denen von Wait und Walters zu vergleichen. Zu diesem Zweck schreiben wir die von ihnen verwendete Höhenabhängigkeit der Elektronendichte in der Form

$$N_{el}(z) = N_{ref} \exp(+ \frac{z - z_{ref}}{H_{ref}})$$

und vergleichen sie mit der Anlagerungs-Modellfunktion, welche wir folgendermaßen in der Umgebung von $z = z_{ref}$ annähern:

$$N_{el}(z) = N_m \exp(1 - \exp(- \frac{z - z_{ref} + z_{ref} - z_m}{H_s}))$$

$$= N_m \exp(1 - \exp(- \frac{z_{ref} - z_m}{H_s}) + \exp(- \frac{z_{ref} - z_m}{H_s}) - \exp(- \frac{(z - z_{ref}) + (z_{ref} - z_m)}{H_s}))$$

$$= N_m \exp(1 - \exp(- \frac{z_{ref} - z_m}{H_s})) \cdot \exp(\frac{1 - \exp(- \frac{z - z_{ref}}{H_s})}{\exp(\frac{z_{ref} - z_m}{H_s})})$$

Der Faktor links vom Multiplikationspunkt kann mit N_{ref} identifiziert werden. Für z nahe z_{ref} kann die Exponentialfunktion oberhalb des Bruchstriches durch das erste Glied ihrer Taylor-Entwicklung angenähert werden, wir erhalten die näherungsweise Darstellung, die oben hingeschrieben wurde, wenn wir setzen

$$N_{ref} = N_m \exp(1 - \exp(- \frac{z_{ref} - z_m}{H_s})) \quad , \quad H_{ref} = H_s \exp(\frac{z_{ref} - z_m}{H_s})$$

Ganz ähnlich verläuft der Vergleich mit Volland's Modellfunktion.- Die Zahl der unbekannten Parameter ist in beiden Modelltypen gleich, jedoch ist aus physikalischen Gründen zu erwarten, daß die hier eingeführten Modellfunktionen (Abschn. 4.1.2) für einen etwas größeren Höhenbereich Gültigkeit haben dürften als die exponentiell ansteigenden Modellfunktionen von Wait und Walters.

4.1.4 Höhenabhängigkeit der Stoßfrequenz

In sehr grober Vereinfachung theoretischer Gedankengänge von Nicolet (1953) stellen wir die Wahrscheinlichkeit für einen Zusammenstoß eines Elektrons mit einem neutralen Molekül dar durch den "Kollisions-Querschnitt" ξ^2_{coll}. Dann ergibt eine sehr einfache Betrachtung folgenden Zusammenhang zwischen der Stoßfrequenz, der Molekülzahldichte, und der mittleren Atmosphären-Temperatur

$$\nu_c = N_{mol}\, \xi^2_{coll} \sqrt{3\, \frac{k_{BO}\, T_{abs}}{m_{el}}} \qquad \left(\begin{array}{l} m_{el} = \text{Elektronenmasse} \\ k_{BO} = \text{Boltzmann-Konstante} \end{array} \right)$$

Unter Annäherung der Atmosphäre durch die barometrische Höhenformel ergibt sich die Höhenabhängigkeit von ν_c zu

$$\nu_c(z) = N_{mol,m}\, \xi^2_{coll} \sqrt{3\, \frac{k_{BO}\, T_{abs}}{m_{el}}}\, \exp\left(-\frac{z - z_m}{H_s}\right) = \nu_{cm} \exp\left(-\frac{z - z_m}{H_s}\right)$$

Für numerische Berechnungen erweist es sich als zweckmäßig, das Stoßfrequenzprofil mit Parametern zu beschreiben, die ihrerseits nicht vom Elektronendichte-Profil abhängen. Durch Wahl der konstanten Bezugshöhe 70 km gelangen wir zu folgender Darstellung

$$\nu_c(z) = \nu_{c70} \exp\left(-\frac{z - 70\ \text{km}}{H_{s\nu}}\right)$$

Hierin ist ν_{c70} die Stoßfrequenz in 70 km Höhe, $H_{s\nu}$ ist die Skalenhöhe des Stoßfrequenzprofils, die man für theoretische Berechnungen zweckmäßigerweise ebenfalls vom Elektronendichte-Profil unabhängig wählen kann.

4.2 Differentialgleichungen für die Horizontal-Koordinaten der elektromagnetischen Feldvektoren bei höhenabhängiger DK

4.2.1 Matrixformulierung

Nähern wir die Höhenabhängigkeit von Elektronendichte und Stoßfrequenz durch stetige Funktionen an, wie im vorigen Abschnitt gezeigt, so werden auch Real- und Imaginärteil der komplexen DK ϵ_r und des komplexen Brechungsindexes n^c

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_N^2}{\omega^2 + \nu_c^2} - j\,\frac{\nu_c}{\omega}\,\frac{\omega_N^2}{\omega^2 + \nu_c^2}\,, \quad n^c = \sqrt{\mu_r\,\epsilon_r}\,, \quad \omega_N^2 = \frac{N_{el} q_{el}^2}{m_{el}\,\epsilon_o}\,, \quad \mu_r \approx 1$$

stetige Funktionen der Höhe. Wir gehen aus von den Differentialgleichungen für die TM-und TE-Welle, wie wir sie in Abschn. 2.3.1 aufgeschrieben haben. Wie in 2.3.1 versuchen wir, die dritte Zeile des Gleichungssystems durch die erste und zweite auszudrücken:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-1}{jk_o\,\epsilon_r}\,\frac{\partial(Z_oH_y)}{\partial z}\right) = \frac{-1}{jk_o}\left(\frac{-1}{\epsilon_r^2}\,\frac{\partial\epsilon_r}{\partial z}\,\frac{\partial(Z_oH_y)}{\partial z} + \frac{1}{\epsilon_r}\,\frac{\partial^2(Z_oH_y)}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial(Z_oH_x)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-1}{jk_o/\mu_r}\,\frac{\partial(-E_y)}{\partial z}\right) = \frac{-1}{jk_o/\mu_r}\,\frac{\partial^2(-E_y)}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{jk_o\,\epsilon_r}\,\frac{\partial^2(Z_oH_y)}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial(Z_oH_z)}{\partial x} = \frac{1}{jk_o/\mu_r}\,\frac{\partial^2(-E_y)}{\partial x^2}$$

Die Wellengleichungen lauten nunmehr

$$\frac{\partial^2(Z_oH_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(Z_oH_y)}{\partial z^2} - \frac{1}{\epsilon_r}\,\frac{d\epsilon_r}{dz}\,\frac{\partial(Z_oH_y)}{\partial z} + k_o^2/\mu_r\,\epsilon_r\,(Z_oH_y) = 0$$

und

$$\frac{\partial^2(-E_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(-E_y)}{\partial z^2} + k_o^2/\mu_r\,\epsilon_r\,(-E_y) = 0$$

Eine Zusammenstellung von Lösungen für relativ einfache Modelle der Höhenabhängigkeit von ϵ_r findet man bei Wait (1962). In dieser Ausarbeitung beschränken wir uns auf Lösungen, die aus ebenen Wellen zusammengesetzt sind. Die Wellennormalen aller dieser Wellen gehorchen dem Brechungsgesetz

$$n^c(z)\,\sin(\Theta_\uparrow(z)) = \text{const} = \sin(\Theta_{\uparrow o}) = S_o$$

wobei $\Theta_\uparrow(z)$ der Neigungswinkel der Wellen in der Höhe z, $\Theta_{\uparrow o}$ der Neigungswinkel der von unten auf die Ionosphäre einfallenden Welle ist. Hieraus folgt, daß die Differentiation nach x gleichbedeutend mit Multiplikation mit dem Faktor $-jk_oS_o$ ist. Die Feldvektor-Koordinaten hängen dann nur noch von der Ortskoordinate z ab. Das Differentialgleichungssystem in Abschn. 2.3.1 wird

$$-\frac{d}{dz}(Z_oH_y) = jk_o\,\epsilon_r\,E_x \qquad -\frac{d}{dz}(-E_y) = jk_o/\mu_r(Z_oH_x)$$

$$-jk_oS_o(Z_oH_y) = jk_o\,\epsilon_r\,E_z \qquad -jk_oS_o(-E_y) = jk_o/\mu_r(Z_oH_z)$$

$$\frac{d}{dz}(E_x) + jk_oS_oE_z = -jk_o/\mu_r(Z_oH_y) \qquad \frac{d}{dz}(Z_oH_x) + jk_oS_o(Z_oH_z) = -jk_o\,\epsilon_r(-E_y)$$

Mit Hilfe der vorletzten Zeile können wir die z-Koordinaten in der letzten Zeile eliminieren

$$E_z = -\frac{S_o}{\epsilon_r}(Z_oH_y) \quad , \quad (Z_oH_z) = -\frac{S_o}{\mu_r}(-E_y)$$

und erhalten in Matrixschreibweise folgende Gleichungssysteme für die Horizontal-Koordinaten:

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_y \end{pmatrix} = -jk_o\begin{pmatrix} 0 & (\mu_r - \frac{S_o^2}{\epsilon_r}) \\ \epsilon_r & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_y \end{pmatrix} , \quad \frac{d}{dz}\begin{pmatrix} Z_oH_x \\ -E_y \end{pmatrix} = -jk_o\begin{pmatrix} 0 & (\epsilon_r - \frac{S_o^2}{\mu_r}) \\ \mu_r & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Z_oH_x \\ -E_y \end{pmatrix}$$

Beide Gleichungssysteme haben die gemeinsame Form

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = -jk_o\begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{d}{dz}\mathbf{F} = -jk_o\,\underline{\underline{\chi}}\cdot\mathbf{F}$$

Die Matrix $\underline{\underline{\chi}}$ bezeichnen wir als "Koeffizientenmatrix" (Volland, 1968).

4.2.2 Das Wellenpaar als Lösung des Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten

In Abschn. 2.3 hatten wir uns durch physikalische Vorstellungen und durch die Wellengleichung zum Begriff des Wellenpaares leiten lassen. Auch im inhomogenen Medium möchten wir nun Lösungen aus ebenen, zu Wellenpaaren zusammengefaßten Wellen konstruieren. Das gelingt in der Weise, daß die Höhenabhängigkeit der komplexen DK durch geeignete Stufenfunktionen, das Medium selbst also durch eine Überlagerung ebener, homogener Teilschichten angenähert wird. In jeder Teilschicht kann dann ein Wellenpaar angesetzt werden. Die Amplituden dieser Wellenpaare ergeben sich dann aus der Forderung, daß sich die horizontalen Komponenten der Feldvektoren an den Trennebenen zwischen den einzelnen Teilschichten nicht unstetig ändern durfen. Ehe wir diesen Gedanken durchführen, zeigen wir, wie sich das Wellenpaar ergibt, wenn wir das mathematische Standard-Verfahren zur Lösung linearer Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten auf die obenstehenden Gleichungssysteme anwenden.

Gleichungssysteme des obenstehenden Typs sind dann gelöst, wenn es gelingt, eine Transformationsmatrix $\underline{\underline{C}}$ zu finden, mit deren Hilfe die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\chi}}$ auf Hauptachsenform transformiert werden kann. Wir schreiben

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}\cdot\mathbf{F}_{tr} = \begin{pmatrix} c_x^{\uparrow} & c_x^{\downarrow} \\ c_y^{\uparrow} & c_y^{\downarrow} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} F^{\uparrow} \\ F^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

und erhalten als transformierte Differentialgleichung

$$\mathbf{F}_{tr} = \underline{\underline{C}}^{-1}\cdot\mathbf{F} \quad , \quad \frac{d}{dz}\mathbf{F}_{tr} = \underline{\underline{C}}^{-1}\cdot\frac{d}{dz}\mathbf{F} = -jk_o\,\underline{\underline{C}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\chi}}\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\mathbf{F}_{tr} = -jk_o\,\underline{\underline{Q}}\cdot\mathbf{F}_{tr}$$

Hierin soll die transformierte Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{Q}}$ nur noch in der Hauptdiagonalen von Null verschiedene Glieder haben:

$$\underline{\underline{C}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\chi}}\cdot\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} c_x^{\uparrow} & c_x^{\downarrow} \\ c_y^{\uparrow} & c_y^{\downarrow} \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_x^{\uparrow} & c_x^{\downarrow} \\ c_y^{\uparrow} & c_y^{\downarrow} \end{pmatrix} = \underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} q^{\uparrow} & 0 \\ 0 & q^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

Diese Glieder können wir angeben, ohne die Elemente der Tranformationsmatrix zu kennen.

Sie sind Lösungen der "charakteristischen Gleichung"

$$\det(\underline{\underline{\chi}} - q\,\underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} (\chi_{xx} - q) & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & (\chi_{yy} - q) \end{vmatrix} = q^2 - (\chi_{xx} + \chi_{yy})q + \begin{vmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} \end{vmatrix} = 0$$

Das transformierte Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} F^{\uparrow} \\ F^{\downarrow} \end{pmatrix} = -jk_o \begin{pmatrix} q^{\uparrow} & 0 \\ 0 & q^{\downarrow} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F^{\uparrow} \\ F^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

wird demnach gelöst durch

$$\mathbf{F}_{tr} = \begin{pmatrix} F^{\uparrow} \\ F^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_o^{\uparrow} \exp(-jk_o q^{\uparrow} z) \\ F_o^{\downarrow} \exp(-jk_o q^{\downarrow} z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-jk_o q^{\uparrow} z) & 0 \\ 0 & \exp(-jk_o q^{\downarrow} z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_o^{\uparrow} \\ F_o^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

Für die Diagonalmatrix mit den Ausbreitungsfunktionen verwenden wir, in Anlehnung an Volland (1968, pg. 57 ff), folgende symbolische Abkürzung

$$\mathbf{F}_{tr} = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o\,\underline{\underline{Q}}\,z) \cdot \mathbf{F}_{tro}$$

Um bei der Berechnung von Reflexionsfaktoren die Randbedingungen erfüllen zu können, brauchen wir die horizontalen Vektorkoordinaten. Hierzu müssen wir die Elemente der Transformationsmatrix ausrechnen. Das geschieht mittels folgender Umformung der transformierten Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz}\mathbf{F}_{tr} = -jk_o \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \mathbf{F}_{tr} = -jk_o\,\underline{\underline{Q}} \cdot \mathbf{F}_{tr} \quad , \quad (\underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{Q}}) \cdot \mathbf{F}_{tr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ausgeschrieben

$$\left(\begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x^{\uparrow} & c_x^{\downarrow} \\ c_y^{\uparrow} & c_y^{\downarrow} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_x^{\uparrow} & c_x^{\downarrow} \\ c_y^{\uparrow} & c_y^{\downarrow} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q^{\uparrow} & 0 \\ 0 & q^{\downarrow} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \exp(-jk_o q^{\uparrow} z) & 0 \\ 0 & \exp(-jk_o q^{\downarrow} z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_o^{\uparrow} \\ F_o^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setzen wir hierin der Reihe nach

$$\mathbf{F}_{tro} = \begin{pmatrix} F_o^{\uparrow} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{F}_{tro} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_o^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

so erhalten wir je ein homogenes Gleichungssystem für die Elemente jeder Spalte von $\underline{\underline{C}}$:

$$\begin{aligned} (\chi_{xx} - q^{\uparrow})\, c_x^{\uparrow} + \chi_{xy}\, c_y^{\uparrow} &= 0 \\ \chi_{yx}\, c_x^{\uparrow} + (\chi_{yy} - q^{\uparrow})\, c_y^{\uparrow} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} (\chi_{xx} - q^{\downarrow})\, c_x^{\downarrow} + \chi_{xy}\, c_y^{\downarrow} &= 0 \\ \chi_{yx}\, c_x^{\downarrow} + (\chi_{yy} - q^{\downarrow})\, c_y^{\downarrow} &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus berechnen wir die Verhältnisse

$$\frac{c_x^{\uparrow}}{c_y^{\uparrow}} = -\frac{\chi_{xy}}{\chi_{xx} - q^{\uparrow}} = -\frac{\chi_{yy} - q^{\uparrow}}{\chi_{yx}} \quad , \quad \frac{c_x^{\downarrow}}{c_y^{\downarrow}} = -\frac{\chi_{xy}}{\chi_{xx} - q^{\downarrow}} = -\frac{\chi_{yy} - q^{\downarrow}}{\chi_{yx}}$$

Die beiden unbestimmten Faktoren $c_y^{\uparrow}$ und $c_y^{\downarrow}$ schlagen wir den ebenfalls noch unbestimmten Amplituden $F_o^{\uparrow}$ und $F_o^{\downarrow}$ zu und erhalten als Lösung für das Differentialgleichunssystem

$$\mathbf{F} = \underline{\underline{C}} \cdot \mathbf{F}_{tr} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o\,\underline{\underline{Q}}\,z) \cdot \mathbf{F}_{tro} = \begin{pmatrix} \dfrac{q^{\uparrow} - \chi_{yy}}{\chi_{yx}} & \dfrac{q^{\downarrow} - \chi_{yy}}{\chi_{yx}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \exp(-jk_o q^{\uparrow} z) & 0 \\ 0 & \exp(-jk_o q^{\downarrow} z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_o^{\uparrow} \\ F_o^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

Diese Lösung ist darum hier so ausführlich und allgemein hingeschrieben worden, weil sie uns Schritt für Schritt bei der Lösung der Wellengleichung im anisotropen Medien wieder begegnen wird. Kehren wir zur Differentialgleichung der TM- bzw. TE-Welle zurück, so vereinfacht sich die Lösung erheblich wegen

$$\varkappa_{xx} = \varkappa_{yy} = 0 \;,\; \varkappa_{xy} = \begin{cases} \mu_r - S_o^2/\epsilon_r & \text{für TM-Welle} \\ \epsilon_r - S_o^2/\mu_r & \text{für TE-Welle} \end{cases} \;,\; \varkappa_{yx} = \begin{cases} \epsilon_r & \text{für TM-Welle} \\ \mu_r & \text{für TE-Welle} \end{cases}$$

Somit erhalten wir für die charakteristische Gleichung und ihre Lösungen

$$q^2 - (\epsilon_r/\mu_r - S_o^2) = 0 \;,\quad q^{\uparrow} = +\sqrt{\epsilon_r/\mu_r - S_o^2} = +q^c \;,\quad q^{\downarrow} = -\sqrt{\epsilon_r/\mu_r - S_o^2} = -q^c$$

und die Transformationsmatrix wird für die TM- bzw. TE-Welle

$$\underline{\underline{C}}_{tm} = \begin{pmatrix} \frac{q^c}{\epsilon_r} & -\frac{q^c}{\epsilon_r} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{\underline{C}}_{te} = \begin{pmatrix} \frac{q^c}{\mu_r} & -\frac{q^c}{\mu_r} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in Übereinstimmung mit 2.3.3 .

4.3 Berechnung des Reflexionsfaktors inhomogener Ionosphärenmodelle

Im folgenden werden drei Methoden der numerischen Reflexionsfaktor-Berechnung geschildert. Gemeinsam ist allen dreien das zu Beginn von 4.2.2 genannte Prinzip der Unterteilung der Ionosphäre in viele, dünne, homogene Teilschichten. Diese Schichtung nimmt den Höhenbereich zwischen z_o und z_M ein. Unterhalb von z_o haben wir Vakuum, oberhalb z_M eine nahezu homogenes Medium. Der Übergang wird in M Teilschichten zerlegt. Die Teilschicht Nr. m hat die Dicke Δz_m und liegt zwischen z_{m-1} und z_m . Entsprechend geben wir dem Vakuum die Laufnummer 0 und dem homogenen Medium oberhalb z_M die Laufnummer M+1 . Innerhalb jeder Schicht sollen ϵ_r und μ_r nahezu konstant sein, wir bezeichnen ihre Werte mit ϵ_{rm} und μ_{rm} . Daraus ergibt sich für jede Schicht das Brechzahl-Quadrat, der q-Wert für die auf- und die absteigende Welle und die Elemente der Transformationsmatrix:

$$(n^c)_m^2 = \epsilon_{rm}/\mu_{rm} \;,\; q_m^c = \sqrt{(n^c)_m^2 - S_o^2} \;,\; q_m^{\uparrow} = +q_m^c \;,\; q_m^{\downarrow} = -q_m^c$$

$$c_{xm}^{\uparrow} = \begin{cases} \frac{q_m^c}{\epsilon_{rm}} & \text{für TM-Welle} \\ \frac{q_m^c}{\mu_{rm}} & \text{für TE-Welle} \end{cases} \;,\; c_{xm}^{\downarrow} = -c_{xm}^{\uparrow} \;,\; c_{ym}^{\downarrow} = c_{ym}^{\uparrow} = 1 \text{ für alle m und beide Wellentypen.}$$

Mit Rücksicht auf die spätere Erweiterung aller Überlegungen dieses Abschnittes wird die umständlichere Symbolik der allgemeinen Lösung des vorigen Abschnittes beibehalten.

4.3.1 Matrizenprodukt-Methode (Volland)

Innerhalb jeder Schicht können wir die Lösung des Differentialgleichungssystems in folgender Weise schreiben:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} c_{xm}^{\uparrow} & c_{xm}^{\downarrow} \\ c_{ym}^{\uparrow} & c_{ym}^{\downarrow} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_m^{\uparrow} \\ F_m^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{xm}^{\uparrow} & c_{xm}^{\downarrow} \\ c_{ym}^{\uparrow} & c_{ym}^{\downarrow} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \exp(-jk_o q_m^{\uparrow} z) & 0 \\ 0 & \exp(-jk_o q_m^{\downarrow} z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{mo}^{\uparrow} \\ F_{mo}^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

Unterhalb der Ionosphäre gehen $c_{xm}^{\uparrow}$ und $c_{xm}^{\downarrow}$ in die Werte C_o und $-C_o$ über.

Das Differentialgleichungssystem wird unterhalb der Ionosphäre gelöst durch (vgl. 3.2)

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}_o = \begin{pmatrix} C_o & -C_o \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_o^{\uparrow} \\ F_o^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_o & -C_o \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \exp(-jk_oC_oz) & 0 \\ 0 & \exp(+jk_oC_oz) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{oo}^{\uparrow} \\ F_{oo}^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

Der Reflexionsfaktor R_o in der Höhe z_o ist dann gefunden, wenn wir in der gleichen Höhe das Horizontalkomponenten-Verhältnis L_o gefunden haben

$$R_o = \frac{F_{oo}^{\downarrow}}{F_{oo}^{\uparrow}} \quad , \qquad L_o = \left(\frac{F_y}{F_x}\right)_{z=z_o} = L(z = z_o)$$

Dann ist nämlich

$$\begin{pmatrix} F_o^{\uparrow} \\ F_o^{\downarrow} \end{pmatrix}_{z=z_o} = \begin{pmatrix} F_{oo}^{\uparrow} \\ R_oF_{oo}^{\uparrow} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{C_o} & 1 \\ \frac{-1}{C_o} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ L\,F_x \end{pmatrix}_{z=z_o} \quad \text{folglich} \quad \underline{R_o = \frac{L_oC_o - 1}{L_oC_o + 1}}$$

Gegeben ist uns jedoch nur das Verhältnis L_M oberhalb z_M, wo nur noch eine aufsteigende Welle existiert: (vgl. 3.2)

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}_{z > z_M} = \begin{pmatrix} F_x \\ L\,F_x \end{pmatrix}_{z > z_M} = \begin{pmatrix} c_{x,M+1}^{\uparrow} & c_{x,M+1}^{\downarrow} \\ c_{y,M+1}^{\uparrow} & c_{y,M+1}^{\downarrow} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{M+1}^{\uparrow} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{x,M+1}^{\uparrow}\,F_{M+1}^{\uparrow} \\ c_{y,M+1}^{\uparrow}\,F_{M+1}^{\uparrow} \end{pmatrix}$$

$$\text{folglich} \quad L_M = L(z > z_M) = \frac{c_{y,M+1}^{\uparrow}}{c_{x,M+1}^{\uparrow}} = \frac{\epsilon_{r,M+1}}{q_{M+1}^{c}} \text{ für TM} \ , = \frac{\mu_{r,M+1}}{q_{M+1}^{c}} \text{ für TE} \ .$$

Ist uns nun $L = F_y/F_x$ an der Obergrenze irgendeiner der M Teilschichten gegeben, so können wir daraus L für die Untergrenze der gleichen Teilschicht bestimmen. Hierzu gehen wir aus von dem Zusammenhang zwischen der transformierten Spalte $\mathbf{F}_{tr}$ an der Obergrenze und der an der Untergrenze:

$$\begin{pmatrix} F_m^{\uparrow}(z_{m-1}) \\ F_m^{\downarrow}(z_{m-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(+jk_oq_m^{\uparrow}\Delta z_m) & 0 \\ 0 & \exp(+jk_oq_m^{\downarrow}\Delta z_m) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_m^{\uparrow}(z_m) \\ F_m^{\downarrow}(z_m) \end{pmatrix}$$

und rechnen hieraus F_x und F_y mit Hilfe der Transformationsmatrix

$$\begin{pmatrix} F_x(z_{m-1}) \\ F_y(z_{m-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{xm}^{\uparrow} & c_{xm}^{\downarrow} \\ c_{ym}^{\uparrow} & c_{ym}^{\downarrow} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_m^{\uparrow}(z_{m-1}) \\ F_m^{\downarrow}(z_{m-1}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{xm}^{\uparrow} & c_{xm}^{\downarrow} \\ c_{ym}^{\uparrow} & c_{ym}^{\downarrow} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \exp(+jk_oq_m^{\uparrow}\Delta z_m) & 0 \\ 0 & \exp(+jk_oq_m^{\downarrow}\Delta z_m) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{xm}^{\uparrow} & c_{xm}^{\downarrow} \\ c_{ym}^{\uparrow} & c_{ym}^{\downarrow} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_x(z_m) \\ F_y(z_m) \end{pmatrix}$$

In Matrizenschreibweise

$$\mathbf{F}(z_{m-1}) = \underline{\underline{C}}_m \cdot \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+jk_o\,\underline{\underline{Q}}_m\,\Delta z_m) \cdot \underline{\underline{C}}_m^{-1} \cdot \mathbf{F}(z_m) = \underline{\underline{T}}_m \cdot \mathbf{F}(z_m)$$

Hierin ist $\underline{\underline{T}}_m$ die <u>"Übertragunsmatrix"</u> der m-ten Teilschicht.

Den Zusammenhang zwischen den Spalten $\mathbb{F}$ in den Höhen z_M und z_o erhalten wir nun mit Hilfe des Matrizenproduktes aus den Übertragunsmatrizen aller Teilschichten:

$$\begin{pmatrix} F_x(z_o) \\ F_y(z_o) \end{pmatrix} = \mathbb{F}(z_o) = \underline{\underline{T}}_1 \cdot \underline{\underline{T}}_2 \cdot \underline{\underline{T}}_3 \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{T}}_m \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{T}}_{M-1} \cdot \underline{\underline{T}}_M \cdot \mathbb{F}(z_M) = \underline{\underline{T}} \cdot \mathbb{F}(z_M)$$

Ausgeschrieben hat der Zuasmmenhang die Form

$$\begin{pmatrix} F_x(z_o) \\ L_o F_x(z_o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x^x & T_x^y \\ T_y^x & T_y^y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x(z_M) \\ L_M F_x(z_M) \end{pmatrix} \quad \text{folglich} \quad \underline{L_o = \frac{T_y^x + T_y^y L_M}{T_x^x + T_x^y L_M}}$$

Abschließend berechnen wir noch die Übertragungsmatrix $\underline{\underline{T}}_m$ der m-ten Teilschicht, indem wir einsetzen

$$q_m^{\uparrow} = +q_m^c \;, \quad q_m^{\downarrow} = -q_m^c \;, \quad c_{xm}^{\uparrow} = c_{xm} = \begin{cases} q_m^c / \epsilon_{rm} & \text{für TM} \\ q_m^c / \mu_{rm} & \text{für TE} \end{cases} \;, \quad c_{xm}^{\downarrow} = -c_{xm} \;, \quad c_{ym}^{\uparrow} = c_{ym}^{\downarrow} = 1$$

$$\underline{\underline{T}}_m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_{xm} & -c_{xm} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \exp(+jk_o q_m^c \triangle z_m) & 0 \\ 0 & \exp(-jk_o q_m^c \triangle z_m) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{c_{xm}}\right) & 1 \\ \left(\frac{-1}{c_{xm}}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k_o q_m^c \triangle z_m) & j c_{xm} \sin(k_o q_m^c \triangle z_m) \\ \frac{1}{-j\, c_{xm}} \sin(k_o q_m^c \triangle z_m) & \cos(k_o q_m^c \triangle z_m) \end{pmatrix}$$

Hiermit berechnet man den L-Wert in der Höhe z_{m-1} aus dem in der Höhe z_m :

$$L_{m-1} = \frac{T_{ym}^x + T_{ym}^y L_m}{T_{xm}^x + T_{xm}^y L_m} = \frac{\frac{j}{c_{xm}} \sin(k_o q_m^c \triangle z_m) + \cos(k_o q_m^c \triangle z_m)\, L_m}{\cos(k_o q_m^c \triangle z_m) + j\, c_{xm} \sin(k_o q_m^c \triangle z_m)\, L_m} = \frac{L_m + \frac{j}{c_{xm}} \tan(k_o q_m^c \triangle z_m)}{1 + j\, c_{xm} \tan(k_o q_m^c \triangle z_m)\, L_m}$$

Dieses vergleichen wir mit dem Ausdruck für den Eingangswiderstand $\underline{Z}_1$ eines homogenen Leitungsstückes der Länge l mit dem Wellenwiderstand $\underline{Z}_L$ und der komplexen Übertragungskonstanten γ , das mit dem Verbraucherwiderstand $\underline{Z}_2$ abgeschlossen ist (siehe z.B. Meinke-Gundlach, Taschenbuch der Hochfrequenztechnik, 3. Aufl. (1968), Abschn. C 25, S. 292) :

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh(\gamma l)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tanh(\gamma l)}$$

und erkennen die Analogie

$$L_{m-1},\, L_m \leftrightarrow \underline{Z}_1,\, \underline{Z}_2 \;, \quad \underline{Z}_L \leftrightarrow \frac{1}{c_{xm}} \;, \quad \gamma \leftrightarrow jk_o q_m^c = j\underline{k}_z$$

Die Komplizierung gegenüber der Leitungstheorie besteht vor allem darin, daß die dem Wellenwiderstand und der Übertragungskonstanten entsprechenden Größen $(c_{xm})^{-1}$ und q_m^c vom Cosinus des Einfallswinkels, C_o , abhängen.

4.3.2 Iterative Methode (Wait und Walters)

Diese Methode ist formal zwar weniger elegant als die im vorigen Abschnitt beschriebene, bietet jedoch bei der Einbeziehung der Anisotropie rechentechnische Vorteile.

Wir gehen wieder davon aus, daß L in der Höhe z_M gegeben ist, weil oberhalb z_M nur eine aufsteigende Welle existiert: Gegeben ist $L(z_M) = L_M$.

Die Lösung des Differentialgleichungssystems innerhalb der m-ten Schicht schreiben wir, mit Rücksicht auf die spätere Anwendung , unter vorläufigem Verzicht auf Matrizenschreibweise ausführlich nieder:

$$F_x(z_{m-1} \leq z \leq z_m) = F_{xm}(z) = c_{xm}^{\uparrow} \exp(-jk_o q_m^{\uparrow} z)\, F_{mo}^{\uparrow} + c_{xm}^{\downarrow} \exp(-jk_o q_m^{\downarrow} z)\, F_{mo}^{\downarrow}$$

$$F_y(z_{m-1} \leq z \leq z_m) = F_{ym}(z) = c_{ym}^{\uparrow} \exp(-jk_o q_m^{\uparrow} z)\, F_{mo}^{\uparrow} + c_{ym}^{\downarrow} \exp(-jk_o q_m^{\downarrow} z)\, F_{mo}^{\downarrow}$$

Ist nun L an der Obergrenze der m-ten Schicht gegeben

$$L(z_m) = \frac{F_y(z_m)}{F_x(z_m)} = \frac{F_{ym}(z_m - 0)}{F_{xm}(z_m - 0)}$$, so kann man hieraus das Verhältnis R

$$R(z_m - 0) = \frac{F_m^{\downarrow}(z_m - 0)}{F_m^{\uparrow}(z_m - 0)} = \frac{F_{mo}^{\downarrow} \exp(-jk_o q_m^{\downarrow} z_m)}{F_{mo}^{\uparrow} \exp(-jk_o q_m^{\uparrow} z_m)} = R_{mo} \exp(-jk_o(q_m^{\downarrow} - q_m^{\uparrow})\, z_m) = R_m$$

für die gleiche Höhe bestimmen:

$$L(z_m) = L_m = \frac{c_{ym}^{\uparrow} + R_{mo} \exp(-jk_o(q_m^{\downarrow} - q_m^{\uparrow})\, z_m)\, c_{ym}^{\downarrow}}{c_{xm}^{\uparrow} + R_{mo} \exp(-jk_o(q_m^{\downarrow} - q_m^{\uparrow})\, z_m)\, c_{xm}^{\downarrow}} = \frac{c_{ym}^{\uparrow} + c_{ym}^{\downarrow} R_m}{c_{xm}^{\uparrow} + c_{xm}^{\downarrow} R_m}$$, hieraus

$$R_m = -\frac{L_m c_{xm}^{\uparrow} - c_{ym}^{\uparrow}}{L_m c_{xm}^{\downarrow} - c_{ym}^{\downarrow}} = R_{mo} \exp(-jk_o(q_m^{\downarrow} - q_m^{\uparrow})\, z_m) = R(z_m - 0)$$

R_m stellt das Amplitudenverhältnis zwischen auf- und absteigender Welle <u>unmittelbar unter der Obergrenze der m-ten Schicht</u> dar. Hieraus folgt das Amplitudenverhältnis <u>unmittelbar oberhalb der Untergrenze der m-ten Schicht</u>:

$$R(z_{m-1} + 0) = \frac{F^{\downarrow}(z_{m-1} + 0)}{F^{\uparrow}(z_{m-1} + 0)} = \frac{F_m^{\downarrow}(z_{m-1})}{F_m^{\uparrow}(z_{m-1})} = \frac{F_m^{\downarrow}(z_m) \exp(+jk_o q_m^{\downarrow} \Delta z_m)}{F_m^{\uparrow}(z_m) \exp(+jk_o q_m^{\uparrow} \Delta z_m)} = R_m \exp(+jk_o(q_m^{\downarrow} - q_m^{\uparrow}) \Delta z_m)$$

Hieraus ergibt sich L für die Schicht-Untergrenze

$$L(z_{m-1}) = L_{m-1} = \frac{c_{ym}^{\uparrow} + c_{ym}^{\downarrow} R_m \exp(+jk_o(q_m^{\downarrow} - q_m^{\uparrow}) \Delta z_m)}{c_{xm}^{\uparrow} + c_{xm}^{\downarrow} R_m \exp(+jk_o(q_m^{\downarrow} - q_m^{\uparrow}) \Delta z_m)}$$

Da sich aber L an der Trennebene z_{m-1} stetig verhält, kann man aus L_{m-1} wieder das Amplitudenverhältnis R_{m-1} <u>unmittelbar unterhalb der Untergrenze der m-ten Schicht</u> bestimmen:

$$R_{m-1} = -\frac{L_{m-1} c_{x,m-1}^{\uparrow} - c_{y,m-1}^{\uparrow}}{L_{m-1} c_{x,m-1}^{\downarrow} - c_{y,m-1}^{\downarrow}} = R(z_{m-1} - 0)$$

Hieraus wird wieder R und L für die Untergrenze der (m-1)-ten Schicht berechnet, hieraus wiederum R für die Obergrenze der (m-2)-ten Schicht usf.. Durch Wiederholung des Verfahrens für jede Schichtgrenze gelangt man schließlich zum Reflexionsfaktor in der Höhe z_o.

4.3.3 Integration der Differentialgleichung des Horizontalkomponenten-Verhältnisses (Budden)

Wenn ein gut organisiertes Rechenzentrum mit Bibliotheks-Programmen zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen zur Verfügung steht, so kann man diese zur direkten, numerischen Integration einer Differentialgleichung für L ausnutzen, welche folgendermaßen gewonnen wird:

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{d}{dz}\begin{pmatrix} F_x \\ L\,F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dF_x}{dz} \\ \frac{dL}{dz}F_x + L\frac{dF_x}{dz} \end{pmatrix} = -jk_o\begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} F_x \\ L\,F_x \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{F_x}\left(-L\frac{dF_x}{dz} - jk_o(\chi_{yx} + \chi_{yy}L)\,F_x\right)$$

$$= -L\,(-jk_o(\chi_{xx} + \chi_{xy}\,L)) - jk_o(\chi_{yx} + \chi_{yy}L)$$

$$= \frac{jk_o(\chi_{xy}L^2 + (\chi_{xx} - \chi_{yy})\,L - \chi_{yx})}{}$$, wobei in diesem Fall $\chi_{xx} = \chi_{yy} = 0$

$$\chi_{xy} = \mu_r - \frac{S_o^2}{\epsilon_r}\ , \quad \chi_{yx} = \epsilon_r \quad \text{für TM-Wellen,}$$

$$\chi_{xy} = \epsilon_r - \frac{S_o^2}{\mu_r}\ , \quad \chi_{yx} = \mu_r \quad \text{für TE-Wellen.}$$

Differentialgleichungen dieser Art können mit numerischen Standard-Verfahren, wie z.B. das Runge-Kutta-Verfahren, integriert werden. Auch hier wird der Übergangsbereich zwischen den Höhen z_o und z_M in Teilschichten aufgeteilt, jedoch wird die Aufteilung durch das Rechenprogramm selbst vorgenommen.

Um den Zusammenhang zwischen dieser Methode und der im vorigen Abschnitt beschriebenen aufzuzeigen, setzen wir in den Ausdrücken für R_m und L_{m-1} des vorigen Abschnittes

$$q_m^{\uparrow} = \sqrt{\epsilon_{rm} - S_o^2} = q_m^c\ , \quad q_m^{\downarrow} = -q_m^c\ , \quad c_{ym}^{\uparrow} = c_{ym}^{\downarrow} = 1, \quad c_{xm}^{\uparrow} = -c_{xm}^{\downarrow} = c_{xm} = \begin{cases} q_m^c/\epsilon_{rm} & \text{für tm} \\ q_m^c/\mu_{rm} & \text{für te} \end{cases}$$

und erhalten

$$R_m = \frac{L_m c_{xm} - 1}{L_m c_{xm} + 1} = 1 - \frac{2}{L_m c_{xm} + 1}\ , \quad L_{m-1} = \frac{1}{c_{xm}}\,\frac{1 + R_m\exp(-j\,2k_o q_m^c\,\Delta z_m)}{1 - R_m\exp(-j\,2k_o q_m^c\,\Delta z_m)}$$

Für sehr kleines Δz_m wird näherungsweise $\exp(-j\,2k_o q_m^c\,\Delta z_m) \cong 1 - j2k_o q_m^c\,\Delta z_m$, und damit

$$L_{m-1} = L_m - \frac{dL}{dz}\Delta z_m \cong \frac{1}{c_{xm}}\,\frac{1 + (1 - \frac{2}{L_m c_{xm} + 1})\,(1 - j\,2k_o q_m^c\,\Delta z_m)}{1 - (1 - \frac{2}{L_m c_{xm} + 1})\,(1 - j\,2k_o q_m^c\,\Delta z_m)}$$

$$= \frac{1}{c_{xm}}\,\frac{L_m c_{xm} - jk_o q_m^c\,\Delta z_m\,(L_m c_{xm} - 1)}{1 + jk_o q_m^c\,\Delta z_m\,(L_m c_{xm} - 1)}$$

Auf diesen Ausdruck wird die Näherung $\frac{1}{1+x} \cong 1 - x$ angewendet, Glieder mit höheren Potenzen von Δz_m werden vernachlässigt:

$$L_{m-1} = L_m - \frac{dL}{dz}\Delta z_m = (L_m c_{xm} - jk_o q_m^c \Delta z_m (L_m c_{xm} - 1))\cdot(1 - jk_o q_m^c \Delta z_m (L_m c_{xm} - 1))\cdot\frac{1}{c_{xm}}$$

$$= L_m - \frac{jk_o q_m^c \Delta z_m}{c_{xm}}(L_m^2 c_{xm}^2 - 1)$$

Hieraus folgt sofort die Differentialgleichung für L (Index m weggelassen):

$$\frac{dL}{dz} = jk_o(q^c \cdot c_x \cdot L^2 - \frac{q^c}{c_x}) = \begin{cases} jk_o(\frac{(q^c)^2}{\epsilon_r} L^2 - \epsilon_r) & \text{für tm-Wellen} \\ jk_o(\frac{(q^c)^2}{\mu_r} L^2 - \mu_r) & \text{für te-Wellen} \end{cases}$$

Dies stimmt mit dem aus der Differentialgleichung für die horizontalen Vektorkoordinaten abgeleiteten Ausdruck über-ein. Durch Einsetzen der am Ende von Abschn. 4.3.1 aufgezeigten Analogie läßt sich sofort die entsprechende Gleichung für den Eingangswiderstand inhomogener Leitungen angeben (l = Längenkoordinate entlang der Leitungsachse)

$$\frac{d\underline{Z}}{dl} = \gamma(\frac{1}{\underline{Z}_L}\underline{Z}^2 - \underline{Z}_L)$$

5. Ebene Wellen im homogenen, anisotropen Plasma

5.1 Der DK-Tensor der Ionosphäre

5.1.1 Das Erdmagnetfeld

Das Magnetfeld der Erde kann in erster Näherung durch das Feld eines fiktiven, magnetischen Dipols in der Nähe des Erdmittelpunktes dargestellt werden (Kertz, 1969). Der magnetische Nordpol (d.h.: der Durchstoßpunkt der Dipolachse durch die Oberfläche der Nordhalbkugel) hat die geographischen Koordinaten 79° Nord und 70° West. Die Richtung der Dipolachse stellen wir durch den Einheitsvektor 1_{mpol} dar, der vom magnetischen Südpol zum magnetischen Nordpol hinzeigt. Die Dipolachse ist die Bezugsachse des geomagnetischen Koordinatensystems. Durch den Großkreis senkrecht zu 1_{mpol} ist der geomagnetische Aequator gegeben, auf den sich die Angabe der geomagnetischen Breite bezieht (Bild 5.1).

Der Erdmagnet- Dipol zeigt in die Richtung vom magnetischen Nord- zum Südpol:

$$\vec{p}_{\mu terr} = -1_{mpol}\, p_{\mu terr}$$

Bezeichnen wir mit 1_{zenit} einen radial vom Erdmittelpunkt fort zeigenden Einheitsvektor und mit r den Abstand vom Erdmittelpunkt, so erhalten wir für das Dipolfeld

$$\vec{H}_{terr} = -\mathrm{grad}\left(\frac{\vec{p}_{\mu terr}}{4\pi\mu_o r^2}\cdot 1_{zenit}\right) = \frac{1}{4\pi\mu_o r^3}\left(3\, 1_{zenit}(1_{zenit}\cdot\vec{p}_{\mu terr}) - \vec{p}_{\mu terr}\right)$$

Mit $1_{msüd}$ und 1_{mnord} bezeichnen wir Einheitsvektoren, welche (außerhalb der Erdoberfläche) senkrecht zu 1_{zenit} stehen und in Richtung magnetisch Nord bzw. Süd zeigen. Mit ihrer Hilfe schreiben wir den Einheitsvektor der Dipolachse

$$1_{mpol} = 1_{mnord}\cos(\varphi_{magn}) + 1_{zenit}\sin(\varphi_{magn})$$

(φ_{magn} = geomagnetische Breite). Damit wird

$$\mu_o \vec{H}_{terr} = \frac{1}{4\pi r^3}\left(3\, 1_{zenit}(-p_{\mu terr}\sin(\varphi_{magn})) + (1_{mnord}\cos(\varphi_{magn}) + 1_{zenit}\sin(\varphi_{magn}))\, p_{\mu terr}\right)$$

$$= \frac{p_{\mu terr}}{4\pi r^3}\left(1_{mnord}\cos(\varphi_{magn}) - 2\, 1_{zenit}\sin(\varphi_{magn})\right)$$

In der Nähe der Erdoberfläche wird daraus (Bartels, in Fischer-Lexikon "Geophysik")

$$\mu_o \vec{H}_{terr} = 0{,}312 \text{ Gauß } \left(1_{mnord}\cos(\varphi_{magn}) - 2\, 1_{zenit}\sin(\varphi_{magn})\right)$$

Für die Berechnung des ionosphärischen DK-Tensors benötigen wir statt des Magnetfeldvektors den Vektor der Gyrofrequenz $\vec{\omega}_H$:

$$\vec{\omega}_H = \frac{q_{el}\,\mu_o \vec{H}_{terr}}{m_{el}}$$

Hierin sind q_{el} und m_{el} Ladung und Masse des Elektrons. Mit dem Zahlenwert $\frac{q_{el}}{m_{el}} = -1{,}76\cdot 10^{11}\,\frac{\text{Asec}}{\text{kg}}$ und 1 Gauß = $10^{-4}\,\frac{\text{Vsec}}{\text{m}^2}$ erhalten wir

$$\vec{\omega}_H = 2\pi\cdot 875 \text{ kHz } \left(1_{msüd}\cos(\varphi_{magn}) + 2\, 1_{zenit}\sin(\varphi_{magn})\right)$$

Der Gyrofrequenzvektor zeigt demnach aufwärts in der magnetischen Nordhalbkugel, abwärts in der Südhalbkugel.

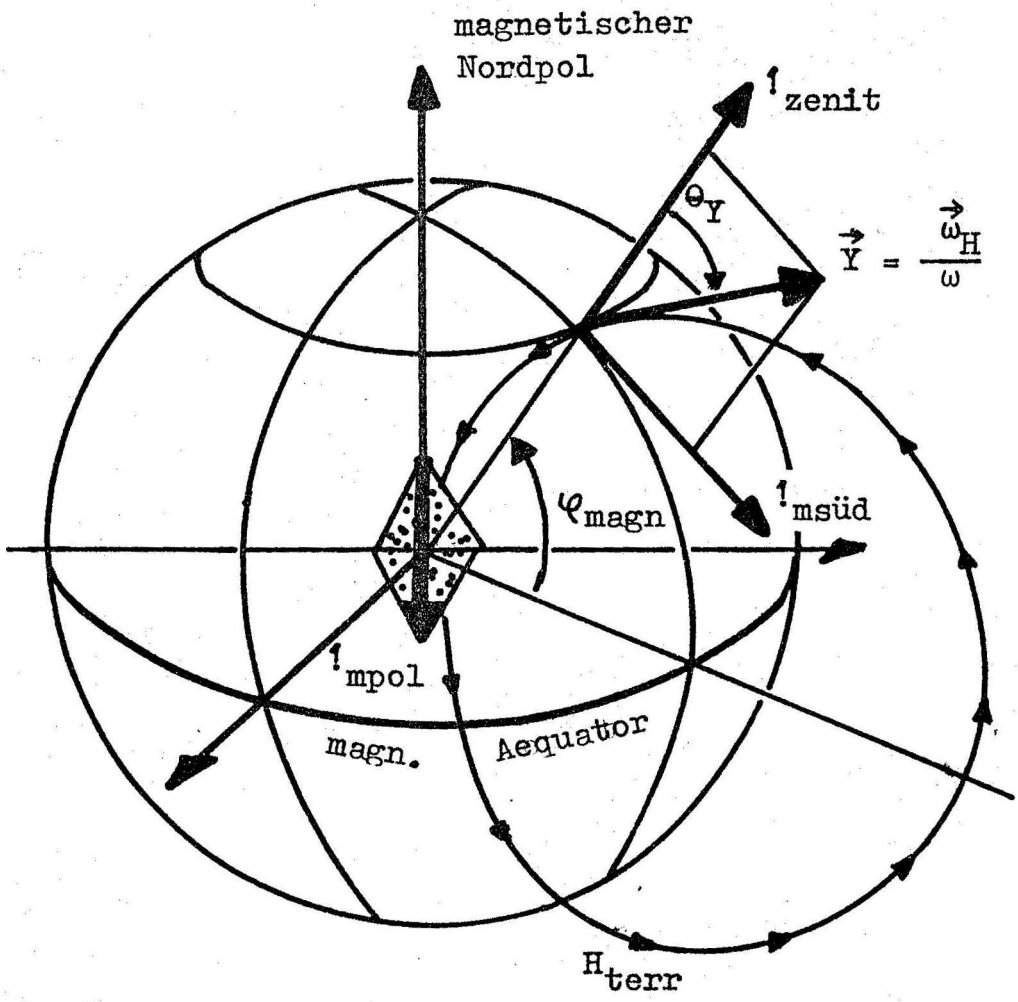


Bild 5.1: Darstellung des Gyrofrequenzvektors im geomagnetischen Koordinatensystem

5.1.2 Elektronen-Bewegungsgleichung und dielektrische Polarisation des Plasmas

5.1.2.1 Zusammenhang zwischen E-vektor und dielektrischer Polarisation

Wenn sich ein Elektron mit der Geschwindigkeit $\frac{d\vec{s}}{dt}$ im Erdmagnetfeld bewegt, so erfährt es eine zusätzliche Kraft, die zu seiner Bewegungsrichtung und zur Magnetfeldrichtung senkrecht orientiert ist. Die in Abschn. 3.1 angegebene Bewegungsgleichung des einzelnen Elektrons ist durch den sog. "Lorentz-Term" zu ergänzen:

$$m_{el} \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = q_{el} \vec{E} - m_{el} \nu_c \frac{d\vec{s}}{dt} + q_{el} \mu_o (\frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{H}_{terr})$$

$$= -\omega^2 m_{el} \vec{s} = q_{el} \vec{E} - j\omega m_{el} \nu_c \vec{s} + j\omega q_{el} \mu_o (\vec{s} \times \vec{H}_{terr})$$

Wenn N_{el} die Elektronendichte ist, so folgt hieraus der Vektor der dielektrischen Polarisation

$$\vec{P}_\epsilon = N_{el} q_{el} \vec{s} = \frac{N_{el} q_{el}}{-\omega^2 m_{el}} (q_{el} \vec{E} - j\omega m_{el} \nu_c \vec{s} + j\omega q_{el} \mu_o (\vec{s} \times \vec{H}_{terr}))$$

Hierin setzen wir ein

$$\omega_N^2 = \frac{N_{el} q_{el}^2}{\epsilon_o m_{el}} , \qquad \vec{\omega}_H = \frac{q_{el} \mu_o \vec{H}_{terr}}{m_{el}}$$

und erhalten

$$\vec{P}_\epsilon = -\epsilon_o \frac{\omega_N^2}{\omega^2} \vec{E} + j \frac{\nu_c}{\omega} \vec{P}_\epsilon - j \vec{P}_\epsilon \times \frac{\vec{\omega}_H}{\omega}$$

Wir erhalten also eine Vektorgleichung für den Zusammenhang zwischen $\vec{P}_\epsilon$ und $\vec{E}$

$$-\epsilon_o \frac{\omega_N^2}{\omega^2} \vec{E} = (1 - j \frac{\nu_c}{\omega}) \vec{P}_\epsilon + j \vec{P}_\epsilon \times \frac{\vec{\omega}_H}{\omega}$$

Nach Einführung der auf Appleton zurückgehenden Abkürzungen (s. z.B. Budden, 1961a)

$$\frac{\nu_c}{\omega} = Z , \quad 1 - j \frac{\nu_c}{\omega} = 1 - j Z = U , \quad \frac{\omega_N^2}{\omega^2} = X , \quad \frac{\vec{\omega}_H}{\omega} = \vec{Y}$$

vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$-\epsilon_o X \vec{E} = U \vec{P}_\epsilon + j \vec{P}_\epsilon \times \vec{Y}$$

Diese Vektorgleichung lösen wir auf nach $\vec{P}_\epsilon$, indem wir sie zunächst vektoriell und dann skalar mit $\vec{Y}$ multiplizieren:

$$\vec{P}_\epsilon = -\frac{\epsilon_o X}{U} \vec{E} - j \frac{\vec{P}_\epsilon \times \vec{Y}}{U}$$

$$\vec{P}_\epsilon \times \vec{Y} = -\frac{\epsilon_o X}{U} (\vec{E} \times \vec{Y}) - j \frac{\vec{Y} (\vec{P}_\epsilon \cdot \vec{Y}) - \vec{P}_\epsilon Y^2}{U}$$

$$\vec{P}_\epsilon \cdot \vec{Y} = -\frac{\epsilon_o X}{U} (\vec{E} \cdot \vec{Y})$$

Einsetzen ergibt $\vec{P}_\epsilon$ als Vektorfunktion von $\vec{E}$:

$$\vec{P}_\epsilon = \frac{\epsilon_o \frac{X}{U}}{U^2 - Y^2} (-U^2 \vec{E} + jU (\vec{E} \times \vec{Y}) + \vec{Y} (\vec{Y} \cdot \vec{E}))$$

Hieraus schließlich erhalten wir den Zusammenhang zwischen der dielektrischen Verschiebung $\vec{D}$ und dem E-vektor:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_\epsilon = \epsilon_0 \left(\left(1 - \frac{X\,U}{U^2 - Y^2}\right) \vec{E} + j \frac{X\,(\vec{E} \times \vec{Y})}{U^2 - Y^2} + \frac{X\,\vec{Y}\,(\vec{Y} \cdot \vec{E})}{U(U^2 - Y^2)} \right)$$

5.1.2.2 Die Hauptachsen des Tensors der Polarisierbarkeit

Aus der Vektorgleichung für $\vec{P}_\epsilon$ lesen wir ab: Das elektrische Feld $\vec{E}$ bewirkt

a) eine dielektrische Verschiebung der Ladungen in Richtung des E-Vektors, so, wie wir sie vom isotropen Medium her kennen (vgl. 3.1),
b) eine "Torsion" des Mediums um die durch den Gyrofrequenz-Vektor gegebene Achse,
c) eine dielektrische Verschiebung in Richtung des Gyrofrequenz-Vektors.

Die Beträge aller drei Anteile der dielektrischen Polarisation sind dem Betrag von $\vec{E}$ proportional, die Richtung des Anteils c) ist parallel zu $\vec{Y}$, die des Anteils b) senkrecht zu der von $\vec{E}$ und $\vec{Y}$ aufgespannten Ebene. Mithin ist $\vec{P}_\epsilon$ eine lineare Vektorfunktion von $\vec{E}$. Wir erfassen den Zusammenhang zwischen $\vec{P}_\epsilon$ und $\vec{E}$ durch den Tensor der Polarisierbarkeit, den zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ durch den Tensor der relativen Dielektrizitätskonstanten, im folgenden kurz als DK-Tensor bezeichnet.

Das Erdmagnetfeld hat demnach zur Folge, daß die dielektrische Polarisation (die "Wirkung") nicht mehr parallel zum elektrischen Feld (der "Ursache") gerichtet ist, wie das im isotropen Medium (Abschn. 3.1) der Fall war: Das Ausbreitungsmedium wird durch das Magnetfeld elektrisch anisotrop. Die Polarisation $\vec{P}_\epsilon$ ist nur noch dann parallel zu $\vec{E}$, wenn $\vec{E}$ in ganz bestimmte Richtungen zeigt. Diese Richtungen bezeichnen wir als die Hauptachsen des Polarisierbarkeits-Tensors, bzw. als dielektrische Hauptachsen des Mediums.

Eine Hauptachse können wir sofort der Vektorgleichung entnehmen: Die Richtung von $\vec{P}_\epsilon$ stimmt dann mit der von $\vec{E}$ überein, wenn $\vec{E}$ parallel zu $\vec{Y}$ ist. Dann nämlich verschwindet das Kreuzprodukt im zweiten Summanden von $\vec{P}_\epsilon$, der erste und dritte ergeben zusammen

$$\vec{P}_\epsilon = \frac{\epsilon_0 \frac{X}{U}}{U^2 - Y^2} (-U^2 \vec{E} + Y^2 \vec{E}) = -\epsilon_0 \frac{X}{U} \vec{E} = \vec{P}_{\epsilon,\text{parallel}}$$

in Übereinstimmung mit dem in 3.1 abgeleiteten Ausdruck für isotropes Medium, d.h., für fehlendes Magnetfeld.

Weitere Hauptachsen finden wir, wenn wir den weiteren Grenzfall betrachten, daß der E-vektor senkrecht zum Magnetfeld schwingt. Dann verschwindet der dritte Summand von $\vec{P}_\epsilon$, die dielektrische Polarisation schwingt in einer Ebene senkrecht zum Vektor $\vec{Y}$ und ist zusammengesetzt aus einer zu $\vec{E}$ parallelen und einer zu $\vec{E}$ senkrechten Komponente, welche gegeneinander um $\pi/2$ phasenverschoben schwingen. Ein linear schwingendes elektrisches Feld erzeugt demnach eine elliptisch schwingende, dielektrische Polarisation.

Wenn hingegen der E-vektor zirkular schwingt, d.h.: mit konstantem Betrag um die Richtung des Magnetfeldes rotiert (Bild 5.2), so rotieren beide Summanden von $\vec{P}_\epsilon$ ebenfalls im gleichen Sinne. Dann ist eine Phasenverschiebung des Vektors $\vec{E}$ gleichbedeutend mit einer räumlichen Drehung: Der Vektor $j\vec{E}$ ist gegen den Vektor $\vec{E}$ um 90° im Sinne der Rotation des E-vektors gedreht. Dann liegt der Vektor $j\vec{E} \times \vec{Y}$ wieder auf der gleichen Geraden wie $\vec{E}$, und zwar

parallel zu $\vec{E}$, wenn die Drehung von $\vec{E}$ mit $\vec{Y}$ eine Rechtsschraube bildet,
entgegengerichtet zu $\vec{E}$, wenn die Drehung von $\vec{E}$ mit $\vec{Y}$ eine Linksschraube bildet.

Aus der Vektorgleichung für $\vec{P}_\epsilon$ wird
im ersten Fall

$$\vec{P}_\epsilon = \vec{P}_{\epsilon,\text{rechts}} = \frac{\epsilon_o X}{U^2 - Y^2}\,(-U\,\vec{E} + Y\,\vec{E}) = \frac{-\epsilon_o X}{U + Y}\,\vec{E}$$

im zweiten Fall

$$\vec{P}_\epsilon = \vec{P}_{\epsilon,\text{links}} = \frac{\epsilon_o X}{U^2 - Y^2}\,(-U\,\vec{E} - Y\,\vec{E}) = \frac{-\epsilon_o X}{U - Y}\,\vec{E}$$

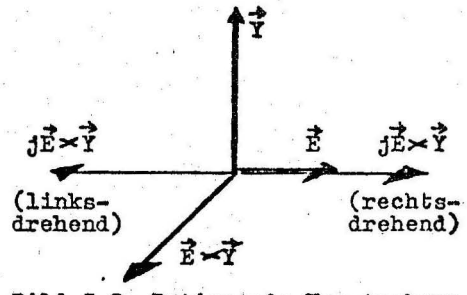


Bild 5.2: Rotierende Hauptachsen des Polarisierbarkeitstensors

Wir haben damit auf anschauliche Art drei Richtungen für den E-vektor gefunden, bei denen die dielektrische Polarisation $\vec{P}_\epsilon$ - und damit auch die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ der Richtung nach mit $\vec{E}$ übereinstimmt. Für diese drei speziellen Richtungen können wir den Zusammenhang zwische $\vec{D}$ und $\vec{E}$ durch drei Werte der relativen DK beschreiben:

$$\epsilon_{r,\text{parallel}} = 1 - \frac{X}{U} \qquad \text{(vgl. Abschn. 3.1, Ende)}$$

$$\epsilon_{r,\text{rechts}} = 1 - \frac{X}{U + Y}$$

$$\epsilon_{r,\text{links}} = 1 - \frac{X}{U - Y}$$

5.1.2.3 Koordinatendarstellung des Polarisierbarkeits- und DK-Tensors

In kartesischen Koordinaten lauten die Vektoren $\vec{E}$, $\vec{P}_\epsilon$, und $\vec{Y}$:

$$\vec{E} = 1_x E_x + 1_y E_y + 1_z E_z \;,\; \vec{P}_\epsilon = 1_x P_{\epsilon x} + 1_y P_{\epsilon y} + 1_z P_{\epsilon z} \;,\; \vec{Y} = 1_x Y_x + 1_y Y_y + 1_z Y_z$$

Die Koordinatenspalte des Vektors

$(\vec{E} \times \vec{Y})$ hängt über eine antimetrische Matrix,

$\vec{Y}\,(\vec{Y} \cdot \vec{E})$ über eine symmetrische Matrix mit der von $\vec{E}$ zusammen:

$$(\vec{E} \times \vec{Y}) = \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ E_x & E_y & E_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \end{vmatrix} := \begin{pmatrix} E_y Y_z - E_z Y_y \\ E_z Y_x - E_x Y_z \\ E_x Y_y - E_y Y_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Y_z & -Y_y \\ -Y_z & 0 & Y_x \\ Y_y & -Y_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{Y}\,(\vec{Y} \cdot \vec{E}) := (\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}^T) \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} Y_x Y_x & Y_x Y_y & Y_x Y_z \\ Y_y Y_x & Y_y Y_y & Y_y Y_z \\ Y_z Y_x & Y_z Y_y & Y_z Y_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Die symmetrische Matrix ist das dyadische Produkt aus der Koordinatenspalte $\mathbf{Y}$ und der Koordinatenzeile $\mathbf{Y}^T$ des Vektors $\vec{Y}$. Der Zusammenhang zwischen $\vec{P}_\epsilon$ und $\vec{E}$ (Abschn. 5.1.2.1, Ende) lautet in Koordinatenschreibweise

$$\mathbf{P}_\epsilon = \begin{pmatrix} P_{\epsilon x} \\ P_{\epsilon y} \\ P_{\epsilon z} \end{pmatrix} = \frac{\epsilon_o X}{U\,(U^2 - Y^2)} \begin{pmatrix} (-U^2 + Y_x^2) & (jU\,Y_z + Y_x Y_y) & (-jU\,Y_y + Y_x Y_z) \\ (-jU\,Y_z + Y_y Y_x) & (-U^2 + Y_y^2) & (jU\,Y_x + Y_y Y_z) \\ (jU\,Y_y + Y_z Y_x) & (-jU\,Y_x + Y_z Y_y) & (-U^2 + Y_z^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Hierfür führen wir, in Anlehnung an Budden (1961a), folgende abgekürzte Schreibweise ein:

$$\mathbf{P}_\epsilon = \begin{pmatrix} P_{\epsilon x} \\ P_{\epsilon y} \\ P_{\epsilon z} \end{pmatrix} = \epsilon_o \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \epsilon_o \underline{\underline{M}} \cdot \mathbf{E}$$

Für den umgekehrten Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{P}_\epsilon$ erhalten wir aus der Vektorgleichung

$$-\epsilon_o X \vec{E} = U \vec{P}_\epsilon + j\, \vec{P}_\epsilon \times \vec{Y}$$

auf entsprechende Weise die Koordinatengleichung

$$-\epsilon_o X \mathbf{E} = -\epsilon_o X \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & jY_z & -jY_y \\ -jY_z & U & jY_x \\ jY_y & -jY_x & U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{\epsilon x} \\ P_{\epsilon y} \\ P_{\epsilon z} \end{pmatrix} = -X \underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \mathbf{P}_\epsilon$$

Die Matrixdarstellung des DK-Tensors ergibt sich aus

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}_\epsilon := \mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}_\epsilon = \epsilon_o (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{M}}) \cdot \mathbf{E} = \epsilon_o \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Aus den Matrixdarstellungen des Tensors der Polarisierbarkeit und des DK-Tensors kann man mit Hilfe der mathematischen Standard-Verfahren für die Hauptachsen-Transformation die Richtungen der dielektrischen Hauptachsen des Mediums bestimmen. Hierauf können wir in diesem Zusammenhang verzichten, da uns die geometrisch-physikalische Anschauungsweise, die in der symbolischen Vektor-Schreibweise ihren adaequaten Ausdruck findet, leichter und sicherer zum Ziele geführt hat.

5.1.2.4 Kartesische Koordinaten des Gyrofrequenzvektors

Der magnetische Nordpol hat die geographischen Koordinaten (Kertz, 1969)

$$\varphi_{mpol} = 79^\circ \text{ Nord}, \quad \lambda_{mpol} = +290^\circ \; (= 290^\circ \text{ Ost} = 70^\circ \text{ West})$$

Aus gegebenen geographischen Koordinaten φ_{geo} und λ_{geo} berechnet man die geomagnetischen nach den Formeln

$$\sin(\varphi_{magn}) = \sin(\varphi_{geo})\,\sin(\varphi_{mpol}) + \cos(\varphi_{geo})\,\cos(\varphi_{mpol})\,\cos(\lambda_{geo} - \lambda_{mpol})$$

$$\sin(\lambda_{magn}) = \frac{\cos(\varphi_{geo})\,\sin(\lambda_{geo} - \lambda_{mpol})}{\cos(\varphi_{magn})}$$

Für den Winkel $\Delta\Psi$ zwischen dem geographischen und dem geomagnetischen Meridian gilt

$$\sin(\Delta\Psi) = \frac{-\cos(\varphi_{mpol})\,\sin(\lambda_{geo} - \lambda_{mpol})}{\cos(\varphi_{magn})}$$

($\Delta\Psi < 0$, wenn magn. Pol östlich von Nord gesehen wird.)

Mithin können wir aus den geographischen die geomagnetischen Koordinaten, und damit den Vektor

$$\vec{Y} = \frac{\vec{\omega}_H}{\omega} = \frac{875\text{ kHz}}{f}\left(1_{msüd}\cos(\varphi_{magn}) + 1_{zenit}\,2\sin(\varphi_{magn})\right)$$

berechnen.

Zur Umrechnung der msüd-Komponente in das x,y,z-System benötigen wir den Winkel Ψ_a zwischen der Ausbreitungsebene und der magnetischen Meridianebene. Dieser ergibt sich aus dem (gegebenen) Winkel $\Psi_{a,geo}$ zwischen dem geographischen Meridian und der Ausbreitungsebene mittels

$$\Psi_a = \Psi_{a,geo} + \Delta\Psi$$

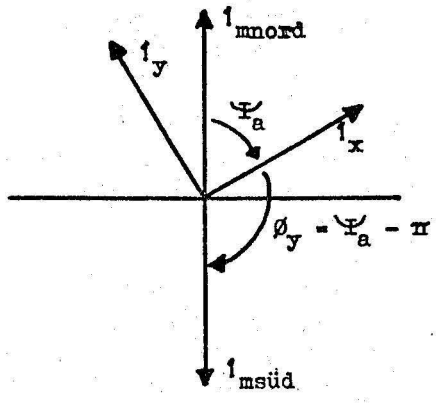
Dann ergeben sich die x,y,z-Komponenten von $\vec{Y}$ folgendermaßen (Bild 5.3)

$$Y_x = -Y_{msüd}\cos(\Psi_a) = -\frac{875\text{ kHz}}{f}\cos(\varphi_{magn})\cos(\Psi_a)$$

$$Y_y = -Y_{msüd}\sin(\Psi_a) = -\frac{875\text{ kHz}}{f}\cos(\varphi_{magn})\sin(\Psi_a)$$

$$Y_z = Y_{zenit} = 2\,\frac{875\text{ kHz}}{f}\sin(\varphi_{magn})$$

Bild 5.3: Berechnung der kartesischen Koordinaten des Gyrofrequenzvektors



5.2 Ebene Wellen im homogenen, anisotropen Ionosphärenplasma

5.2.1 Folgerungen aus den Grundgleichungen

5.2.1.1 Räumliche Konfiguration der Vektoren $\vec{k}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ und $\vec{P}_\epsilon$

Wie im isotropen, homogenen Medium (vgl. Abschn 2.2) versuchen wir, Lösungen der Grundgleichungen aus ebenen, inhomogenen Wellen der Form

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_o \exp(j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}))$$

zusammenzusetzen. Hierbei ist $\vec{k}$ wieder ein komplexer Wellenvektor (vgl. 2.2.1), den wir wieder auf zwei Arten darstellen können:

a) mit Wellennormale (Phasennormale) und Dämpfungsnormale (vgl. 2.2.1),

b) mit komplexem Brechungsindex n^c und komplexem Wellennormalvektor (vgl.2.2.2.2):

$$\vec{k} = 1_{ph}\frac{2\pi}{\lambda} - j\,1_{at}\frac{1}{s_{at}} = k_o\, n^c\, 1_\Phi$$

Für dieses spezielle Feld darf der vektorielle Nablaoperator $\vec{\nabla}$ wieder durch den Vektor-Faktor $-j\vec{k}$ ersetzt werden. Wie in Abschn. 2.1.2 und 2.2.2 stellen wir die aus den Grundgleichungen folgenden Aussagen über die inhomogene, ebene Welle zusammen:

a) Aus

$$\mathrm{div}(\vec{D}) = \mathrm{div}(\epsilon_o\vec{E} + \vec{P}_\epsilon) = \rho_q = 0 = -j\vec{k}\cdot\vec{D} = -j\vec{k}\cdot(\epsilon_o\vec{E} + \vec{P}_\epsilon)$$

folgt: Der Vektor $\vec{D} = \epsilon_o\vec{E} + \vec{P}_\epsilon$ ist orthogonal zum Wellenvektor, <u>nicht</u> jedoch $\vec{E}$!
<u>Der Vektor $\vec{E}$ und $\vec{P}_\epsilon$ hat im allgemeinen eine Komponente in Richtung des Wellenvektors.</u>

b) Aus

$$\mathrm{div}(\vec{B}) = \mathrm{div}(\mu_r\,\mu_o\,\vec{H}) = 0 = -j\vec{k}\cdot(\mu_r\,\mu_o\,\vec{H})$$

folgt: Der Vektor $\vec{H}$ ist orthogonal zum Wellenvektor.

Aus

$$\mathrm{rot}(\vec{E}) = -j\vec{k}\times\vec{E} = -jk_o\,\mu_r\,(Z_o\vec{H}) \quad , \mathrm{rot}(Z_o\vec{H}) = -j\vec{k}\times(Z_o\vec{H}) = jk_o(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_o}\vec{P}_\epsilon)$$

folgt: Der Vektor $\vec{H}$ ist orthogonal zu $\vec{E}$ und zu $\vec{D} = \epsilon_o\vec{E} + \vec{P}_\epsilon$.

N.B.: Man beachte die Bemerkungen über die Orthogonalität in 2.2.2.1 (S. 2 - 5)!
Im nichtleitenden, anisotropen Medium darf die Orthogonalität so interpretiert werden, daß $\vec{E}$ und $\vec{D}$ in derselben Ebene senkrecht zu $\vec{H}$ liegen.

c) In der Wellengleichung

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\vec{E})) = k_o^2\mu_r(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_o}\vec{P}_\epsilon) = -\vec{k}\times(\vec{k}\times E) = (\vec{k}\cdot\vec{k})\,\vec{E} - (\vec{k}\cdot\vec{E})\,\vec{k}$$

schreiben wir $\vec{k}$ mit Hilfe der Vakuumwellenzahl k_o, der Brechzahl n^c und des komplexen Wellennormalvektors 1_Φ ; außerdem lassen wir im folgenden die ausdrückliche Niederschrift der relativen Induktionskonstanten fallen: $\mu_r = 1$. Damit wird die Wellengleichung

$$(n^c)^2\,(\vec{E} - 1_\Phi\,(1_\Phi\cdot\vec{E})) = \vec{E} + \frac{1}{\epsilon_o}\vec{P}_\epsilon$$

Im nichtleitenden, anisotropen Medium läßt sich diese Gleichung geometrisch deuten: Die linke Seite stellt die zum Wellennormalvektor senkrechte Komponente von $\vec{E}$ dar. Die Gleichung besagt mithin, daß die zu 1_Φ parallelen Komponenten von $\vec{E}$ und von $\vec{P}_\epsilon/\epsilon_o$ einander gerade aufheben.

5.2.1.2 Die Wellennormal-Komponenten des E-Vektors und der dielektrischen Polarisation

Die zuletzt gegebene Aussage über die Wellennormalkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{P}_\epsilon$ lautet formal

$$(1_\Phi \cdot \vec{E}) = -\frac{1}{\epsilon_0}(1_\Phi \cdot \vec{P}_\epsilon)$$

und gilt in dieser Form auch für komplexe Wellennormal-Vektoren. Die Tatsache, daß $\vec{E}$ und $\vec{P}_\epsilon$ nicht mehr orthogonal zum Wellennormalvektor sind, unterscheidet die Ausbreitung im anisotropen Medium von der im isotropen. Alle Komplikationen der noch folgenden Betrachtungen haben letztlich hier ihre Ursache. Daher lohnt es sich, schon an dieser Stelle die wichtigsten Folgerungen aus der obenstehenden Gleichung zu ziehen.

Als erstes setzen wir den in 5.1.2.1 abgeleiteten Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{P}_\epsilon$

$$\vec{E} = \frac{-1}{\epsilon_0 X}(U\vec{P}_\epsilon + j\,\vec{P}_\epsilon \times \vec{Y})$$

in die Gleichung ein:

$$U(1_\Phi \cdot \vec{P}_\epsilon) + j\,(1_\Phi \cdot (\vec{P}_\epsilon \times \vec{Y})) = X\,(1_\Phi \cdot \vec{P}_\epsilon)$$

Mit Hilfe der Umformung $(1_\Phi \cdot (\vec{P}_\epsilon \times \vec{Y})) = (\vec{P}_\epsilon \cdot (\vec{Y} \times 1_\Phi))$ erhalten wir

$$\frac{\vec{P}_\epsilon \cdot 1_\Phi}{\vec{P}_\epsilon \cdot (1_\Phi \times \vec{Y})} = \frac{1}{j(X-U)}$$

Das Verhältnis der Wellennormalkomponente von $\vec{P}_\epsilon$ zu der Komponente senkrecht zu der von dem Wellennormalvektor und dem Gyrofrequenzvektor aufgespannten Ebene ist bestimmt durch

a) das äußere Produkt aus dem Gyrofrequenz- und dem Wellennormalvektor,
b) die Plasmafrequenz, und
c) die Stoßfrequenz.

Eine ähnliche Aussage über die entsprechenden Komponenten von $\vec{E}$ erhalten wir, wenn wir die Wellengleichung skalar mit dem Vektor $(1_\Phi \times \vec{Y})$ multiplizieren:

$$(n^c)^2(\vec{E} - 1_\Phi(1_\Phi \cdot \vec{E})) \cdot (1_\Phi \times \vec{Y}) = (n^c)^2\,\vec{E} \cdot (1_\Phi \times \vec{Y}) = \vec{E} \cdot (1_\Phi \times \vec{Y}) + \frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}_\epsilon \cdot (1_\Phi \times \vec{Y})$$

Hierin kann $\vec{P}_\epsilon \cdot (1_\Phi \times \vec{Y})$ durch $\vec{P}_\epsilon \cdot 1_\Phi$ ersetzt werden, darin wiederum $1_\Phi \cdot \vec{P}_\epsilon$ durch $1_\Phi \cdot \vec{E}$:

$$((n^c)^2 - 1)\,\vec{E} \cdot (1_\Phi \times \vec{Y}) = \frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}_\epsilon \cdot (1_\Phi \times \vec{Y}) = j\,\frac{X-U}{\epsilon_0}(\vec{P}_\epsilon \cdot 1_\Phi) = j\,(U-X)\,(\vec{E} \cdot 1_\Phi)$$

Hieraus folgt

$$\frac{\vec{E} \cdot 1_\Phi}{\vec{E} \cdot (1_\Phi \times \vec{Y})} = \frac{(n^c)^2 - 1}{j\,(U-X)}$$

In dieses Verhältnis geht also, neben den oben schon aufgezählten Größen, auch das Quadrat des Brechungsindexes ein. Wie diese Größe in der Ionosphäre zu berechnen ist, wird uns in den folgenden Abschnitten beschäftigen.

5.2.1.3 Die Sonderfälle longitudinaler und transversaler Ausbreitung

In die erste Gleichung des vorhergehenden Unterabschnittes 5.2.1.2 setzen wir die Vektorgleichung für den Zusammenhang zwischen $\vec{P}_\epsilon$ und $\vec{E}$ ein

$$1_\Phi \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0}(1_\Phi \cdot \vec{P}_\epsilon) = \frac{X}{U(U^2 - Y^2)}\left(U^2(1_\Phi \cdot \vec{E}) - jU((\vec{E} \times \vec{Y}) \cdot 1_\Phi) - (1_\Phi \cdot \vec{Y})(\vec{Y} \cdot \vec{E})\right)$$

Unter Benutzung der Vektorformel $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$ folgt hieraus folgende Gleichung für die Komponente des E-Vektors in Wellennormalrichtung:

$$\left(1 - \frac{X\,U}{U^2 - Y^2}\right)(1_\Phi \cdot \vec{E}) = \frac{X\,U}{U^2 - Y^2}\left(\frac{j}{U}(1_\Phi \times \vec{Y}) \cdot \vec{E} - \frac{\vec{Y} \cdot \vec{E}}{U^2}(\vec{Y} \cdot 1_\Phi)\right)$$

Diese Gleichung betrachten wir für die beiden Sonderfälle

Longitudinaler Ausbreitung: 1_Φ parallel zu $\vec{Y}$, $1_\Phi \times \vec{Y} = 0$, und

Transversaler Ausbreitung: 1_Φ senkrecht zu $\vec{Y}$, $1_\Phi \cdot \vec{Y} = 0$.

Bei longitudinaler Ausbreitung ist $\vec{Y} \cdot 1_\Phi = Y$ und $\vec{Y} \cdot \vec{E} = Y\,(1_\Phi \cdot \vec{E})$. Setzt man dieses in die Gleichung ein, so erkennt man sofort, daß sie nur durch die Bedingung

$$1_\Phi \cdot \vec{E} = 0$$

zu erfüllen ist: Bei longitudinaler Ausbreitung schwingt der E-Vektor in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und damit auch senkrecht zum Gyrofrequenzvektor. Damit vereinfacht sich die Wellengleichung (Abschn. 5.2.1.1, Ende) zu

$$((n^c)^2 - 1)\,\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}_\epsilon = \frac{X\,U}{U^2 - Y^2}\left(-\vec{E} + \frac{j}{U}(\vec{E} \times \vec{Y}) + \frac{\vec{Y}}{U^2}(\vec{Y} \cdot \vec{E})\right)$$

Da nun weiterhin 1_Φ parallel zu $\vec{Y}$ und $1_\Phi \cdot \vec{E} = 0$, folgt auch $\vec{Y} \cdot \vec{E} = 0$. Für diesen Fall jedoch haben wir in Abschn. 5.1.2.2 zwei charakteristische Polarisationen des E-Vektors kennengelernt, die sich dadurch auszeichnen, daß die von ihnen hervorgerufene dielektrische Polarisation $\vec{P}_\epsilon$ in die gleiche Richtung weist wie $\vec{E}$: Für diese Hauptachsenrichtungen können wir nun aus der zuletzt angeschriebenen Gleichung die Brechungsindizes bestimmen:

Für rechts- bzw. links-zirkular polarisierten E-Vektor ist $\vec{P}_\epsilon = \vec{P}_{\epsilon,\substack{\text{rechts}\\ \text{links}}} = \dfrac{-\epsilon_0\,X}{U \pm Y}\vec{E}$,

hieraus folgt

$$\underline{(n^c)^2_{\text{rechts}} = 1 - \frac{X}{U + Y}}\ , \quad \underline{(n^c)^2_{\text{links}} = 1 - \frac{X}{U - Y}}$$

Bei transversaler Ausbreitung verschwindet $\vec{Y} \cdot 1_\Phi$. Wir fragen, ob es auch in diesem Falle eine Welle mit transversal schwingendem E-Vektor geben kann, d.H. , ob die Bedingung $1_\Phi \cdot \vec{E} = 0 = -\frac{1}{\epsilon_0} 1_\Phi \cdot \vec{P}_\epsilon$ mit den oben angeschriebenen Zusammenhängen zwischen $\vec{E}$, $\vec{P}_\epsilon$ und 1_Φ verträglich ist. Hierauf gibt uns die zweite Gleichung die Antwort, daß dann auch das gemischte Vektorprodukt $(1_\Phi \times \vec{Y}) \cdot \vec{E}$ verschwinden muß. Das ist jedoch nur möglich, wenn $\vec{E}$ parallel zu $\vec{Y}$ ist, also mit der in Abschn. 5.1.2.2 zuerst angegebenen Hauptachse des Polarisierbarkeitstensors übereinstimmt. In diesem Fall stimmt die vom E-vektor hervorgerufene dielektrische Polarisation mit dem Wert für fehlendes Magnetfeld überein. Man bezeichnet diesen Wellentyp als "ordentliche Welle" (Index ord), den hierfür aus der Wellengleichung folgenden Brechungsindex mit n^c_{ord} :

$$\vec{P}_\epsilon = \vec{P}_{\epsilon,\,\text{parallel}} = -\epsilon_0 \frac{X}{U}\vec{E}\ , \quad \text{folglich:}\quad \underline{(n^c)^2_{ord} = 1 - \frac{X}{U} = (n^c)^2_{isotrop}}$$

Falls $\vec{E}$ nicht parallel zu $\vec{Y}$ ist, ergibt sich aus der zweiten Gleichung dieses Abschnittes ein neuer Ausdruck für das Verhältnis $(1_\Phi \cdot \vec{E})/((1_\Phi \times \vec{Y}) \cdot \vec{E})$, den wir nachstehend mit dem am Ende des Abschn. 5.2.1.2 abgeleiteten vergleichen. Aus diesem Vergleich folgt dann sofort ein Ausdruck für den diesem Wellentyp zugeordneten Brechungsindex n^c_{ex}. Hierbei steht der Index ex für den Terminus "außerordentliche Welle", mit dem dieser Wellentyp bezeichnet wird:

$$\frac{1_\Phi \cdot \vec{E}}{(1_\Phi \times \vec{Y}) \cdot \vec{E}} = \frac{\dfrac{jX}{U^2 - Y^2}}{1 - \dfrac{X\,U}{U^2 - Y^2}} = \frac{jX}{U^2 - Y^2 - X\,U} = \frac{(n^c)^2 - 1}{j\,(U - X)}, \quad \text{folglich}\ \underline{(n^c)^2_{ex} = 1 - \frac{X\,(U - X)}{U^2 - Y^2 - X\,U}}$$

5.2.2 Welleneigene Koordinatensysteme in der Ionosphäre

5.2.2.1 Einführung

Wie in 2.1.3 und in 2.2.3 suchen wir ein Koordinatensystem, in dem die in 5.2.1 vektoriell aufgeschriebenen Beziehungen eine mögli-chst einfache Form erhalten. In Kap. 2 diente die - durch die Orientierung der Erdoberfläche vorgegebene - Vorzugsrichtung der z-Achse als Ausgangspunkt für die Konstruktion welleneigener Koordinatensysteme. Im magnetisierten Medium jedoch ist durch den Gyrofrequenzvektor eine weitere, ausgezeichnete Richtung vorgegeben, deren Einfluß in der Koordinatendarstellung der Vektorgleichungen klar erkennbar bleiben muß.

Die durch den Wellennormalvektor und die z-Achse aufgespannte Ebene werden wir weiterhin als Ausbreitungsebene bezeichnen und mit der z,x-Ebene des kartesischen Koordinatensystems identifizieren(Abschn. 5.2.2.2). Für die Darstellung der Vektorgleichungen hingegen entnehmen wir dem vorigen Abschnitt den Hinweis, nicht mehr die Ausbreitungsebene, sondern <u>die vom Wellennormalvektor und vom Gyrofrequenzvektor aufgespannte Ebene als Bezugsebene zu wählen</u>.

Einen zu dieser Bezugsebene senkrechten Einheitsvektor gewinnen wir durch folgende Kreuzprodukt-Bildung (Bild 5.4)

$$1_{\perp} = \frac{1_{\uparrow} \times \vec{Y}}{\sqrt{1 - (1_{\uparrow} \cdot \vec{Y})^2}} = \frac{1_{\uparrow} \times \vec{Y}}{\sqrt{Y^2 - (1_{\uparrow} \cdot \vec{Y})^2}} ,$$

einen zur Bezugsebene parallelen durch

$$1_{=} = 1_{\perp} \times 1_{\uparrow} = \frac{(1_{\uparrow} \times \vec{Y}) \times 1_{\uparrow}}{\sqrt{Y^2 - (1_{\uparrow} \cdot \vec{Y})^2}} = \frac{\vec{Y} - 1_{\uparrow} (1_{\uparrow} \cdot \vec{Y})}{\sqrt{Y^2 - (1_{\uparrow} \cdot \vec{Y})^2}}$$

Wenn die Stoßfrequenz vernachlässigbar klein ist (also in der hohen Ionosphäre), so zeigt der Einheitsvektor $1_{=}$ stets senkrecht von der Ausbreitungsrichtung fort zum Gyrofrequenzvektor hin. Bei hohen Stoßzahlverlusten erhalten die Einheitsvektoren Imaginärteile (vgl. 2.2), deren räumliche Lage uns jedoch nicht weiter zu interessieren braucht, da mit den komplexen Einheitsvektoren formal genauso gerechnet werden kann wie mit reellen.

In der Reihenfolge $1_{=}$, $1_{\perp}$, $1_{\uparrow}$ bilden die drei Einheitsvektoren ein Rechtsschraubensystem. Der Gyrofrequenzvektor erhält in welleneigenen Koordinaten folgende Darstellung:

$$\vec{Y} = 1_{=} Y_{=} + 1_{\uparrow} Y_{\uparrow} \qquad (Y_{\perp} = 0)$$

Hierin wird die Vektorkoordinate $Y_{\uparrow} = (1_{\uparrow} \cdot \vec{Y})$ in der Literatur als "longitudinale Komponente", die Vektorkoordinate $Y_{=} = (1_{=} \cdot \vec{Y})$ als "transversale Komponente" des Gyrofrequenzvektors bezeichnet (anstelle der bildhaften Indizes $_{=}$ und $_{\uparrow}$ verwendet z.B. Budden (1961a) die Indizes $_{T}$ und $_{L}$.). In der reellen Veranschaulichung ist $Y_{=}$ immer positiv.

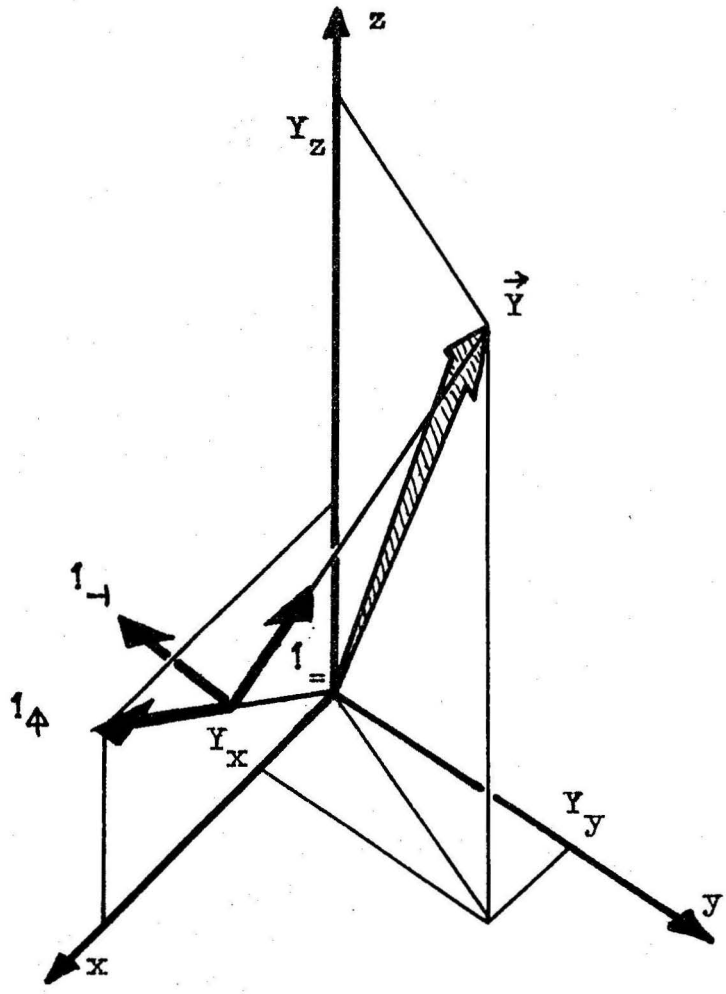


Bild 5.4: Welleneigenes Koordinatensystem in der Ionosphäre

5.2.2.2 Darstellung des welleneigenen Koordinatensystems im x,y,z-System

Der Wellennormalvektor 1_{Φ} hat gegen die z-Achse den (i.A. komplexen) Neigungswinkel Θ_{Φ}. Seine Komponentendarstellung im x,y,z-System ist

$$1_{\Phi} = 1_x S + 1_z C \quad , \text{wobei} \quad S = \sin(\Theta_{\Phi}) \quad , \quad C = \cos(\Theta_{\Phi}) \; .$$

Die (komplexen) Richtungscosinus sehen wir in diesem Abschnitt als vorgegeben an. Im Abschnitt 5.3 werden wir zeigen, wie S und C zu bestimmen sind, wenn nur die x-Komponente des (komplexen) Wellenvektors vorgegeben ist.

Die kartesischen Koordinaten des Gyrofrequenzvektors

$$\vec{Y} = 1_x Y_x + 1_y Y_y + 1_z Y_z$$

sind reell und ergeben sich aus den geomagnetischen Koordinaten und der Orientierung der Ausbreitungsebene relativ zum Magnetischen Meridian (S. Abschn. 5.1.2.4).

Für die longitudinale und transversale Vektorkoordinate des Gyrofrequenzvektors erhalten wir

$$Y_{\Phi} = (1_{\Phi} \cdot \vec{Y}) = S\, Y_x + C\, Y_z \quad , \quad Y_{=} = \sqrt{Y^2 - Y_{\Phi}^2} = \sqrt{Y_y^2 + (C\, Y_x - S\, Y_z)^2}$$

Die Richtungscosinus der Einheitsvektoren

$$1_{=} = 1_x c_{=x} + 1_y c_{=y} + 1_z c_{=z} \qquad \text{und} \qquad 1_{\dashv} = 1_x c_{\dashv x} + 1_y c_{\dashv y} + 1_z c_{\dashv z}$$

erhalten wir aus den Definitionsgleichungen für $1_{=}$ und $1_{\dashv}$ (Abschn. 5.2.2.1):

$$1_{\dashv} = \frac{1_{\Phi} \times \vec{Y}}{\sqrt{Y^2 - Y_{\Phi}^2}} = \frac{1}{Y_{=}} \left(-1_x C\, Y_y + 1_y (C\, Y_x - S\, Y_z) + 1_z S\, Y_y\right)$$

$$1_{=} = 1_{\dashv} \times 1_{\Phi} = \frac{1}{Y_{=}} \left(1_x C\, (C\, Y_x - S\, Y_z) + 1_y Y_y - 1_z S\, (C\, Y_x - S\, Y_z)\right)$$

Zur Darstellung aller drei Einheitsvektoren genügen also die vier Größen

$$C \; , \; S \; , \; c_{=y} = Y_y / Y_{=} \quad \text{und} \quad c_{\dashv y} = \frac{1}{Y_{=}} (C\, Y_x - S\, Y_z) \; .$$

In Matrizenschreibweise lautet der Übergang vom x,y,z-System zum welleneigenen Koordinatensystem

$$\begin{pmatrix} 1_{=} \\ 1_{\dashv} \\ 1_{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\, c_{\dashv y} & c_{=y} & -S\, c_{\dashv y} \\ -C\, c_{=y} & c_{\dashv y} & S\, c_{=y} \\ S & 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_x \\ 1_y \\ 1_z \end{pmatrix} .$$

5.2.3 Räumliche Orientierung der Feldvektoren bei gegebenem Wellennormalvektor

5.2.3.1 Einführung der E-Vektor-Polarisation in der Ionosphäre

Im isotropen Medium bezeichneten wir als "Wellenpolarisation" das Verhältnis zwischen dem TM- und dem TE-Anteil der Welle (s. 2.1.4). Als Bezugsebene für die Definition dieser beiden Anteile diente die Ausbreitungsebene.

Wir werden später sehen, daß es in der Ionosphäre nicht mehr möglich ist, ebene Wellen in voneinander unabhängige TM- und TE-Anteile zu zerlegen, wie das in isotropen Ausbreitungsmedien der Fall ist. Die Ausbreitungsebene verliert in der Ionosphäre ihre physikalische Funktion einer Bezugsebene für die Zerlegung der Wellen. An ihre Stelle tritt die Ebene, welche von dem Wellennormalvektor und vom Gyrofrequenzvektor aufgespannt wird.

Als E-Vektor-Polarisation bezeichnen wir das Verhältnis der E-Vektor-Koordinate in $1_{\dashv}$-Richtung zu der in $1_{=}$-Richtung. Mit

$$1_{\dashv} = \frac{1_{\Phi} \times \vec{Y}}{\sqrt{Y^2 - (1_{\Phi}\cdot\vec{Y})^2}} \quad , \quad 1_{=} = \frac{\vec{Y} - 1_{\Phi}\,(1_{\Phi}\cdot\vec{Y})}{\sqrt{Y^2 - (1_{\Phi}\cdot\vec{Y})^2}} = 1_{\dashv} \times 1_{\Phi} \quad \text{(Abschn. 5.2.2.1)}$$

lautet die vom Koordinatensystem unabhängige <u>Definition der E-Vektor-Polarisation</u>:

$$P_{\dashv} = \frac{\vec{E}\cdot(1_{\Phi} \times \vec{Y})}{\vec{E}\cdot((1_{\Phi} \times \vec{Y}) \times 1_{\Phi})} = \frac{\vec{E}\cdot(1_{\Phi} \times \vec{Y})}{\vec{E}\cdot(\vec{Y} - 1_{\Phi}(1_{\Phi}\cdot\vec{Y}))}$$

Wir übertragen nunmehr die Wellengleichung

$$(n^c)^2\,(\vec{E} - 1_{\Phi}\,(1_{\Phi}\cdot\vec{E})) = \vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}_{\epsilon}$$

in welleneigene Koordinaten. Darin wird

$$\vec{E} = 1_{=}E_{=} + 1_{\dashv}E_{\dashv} + 1_{\Phi}E_{\Phi} \qquad \text{und} \qquad \vec{P}_{\epsilon} = 1_{=}P_{\epsilon=} + 1_{\dashv}P_{\epsilon\dashv} + 1_{\Phi}P_{\epsilon\Phi}$$

$$(n^c)^2\begin{pmatrix} E_{=} \\ E_{\dashv} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{=} + \frac{1}{\epsilon_0}P_{\epsilon=} \\ E_{\dashv} + \frac{1}{\epsilon_0}P_{\epsilon\dashv} \\ E_{\Phi} + \frac{1}{\epsilon_0}P_{\epsilon\Phi} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} ((n^c)^2 - 1)\,E_{=} \\ ((n^c)^2 - 1)\,E_{\dashv} \\ -E_{\Phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\epsilon_0}\begin{pmatrix} P_{\epsilon=} \\ P_{\epsilon\dashv} \\ P_{\epsilon\Phi} \end{pmatrix}$$

Die unterste Zeile kennen wir schon vom Abschn. 5.2.1.2 her. Aus den beiden darüberstehenden folgen die wichtigen Beziehungen

$$P_{\dashv} = \frac{E_{\dashv}}{E_{=}} = \frac{P_{\epsilon\dashv}}{P_{\epsilon=}} = \frac{E_{\dashv} + P_{\epsilon\dashv}/\epsilon_0}{E_{=} + P_{\epsilon=}/\epsilon_0} = \frac{D_{\dashv}}{D_{=}}$$

Aus der Grundgleichung

$$\mathrm{rot}(\vec{E}) = -jk_0n^c\,(1_{\Phi} \times \vec{E}) = -jk_0n^c(-1_{=}E_{\dashv} + 1_{\dashv}E_{=}) = -jk_0(Z_0\vec{H})$$

folgt

$$P_{\dashv} = \frac{E_{\dashv}}{E_{=}} = -\frac{Z_0H_{=}}{Z_0H_{\dashv}} = -\frac{(Z_0\vec{H})\cdot(\vec{Y} - 1_{\Phi}\,(1_{\Phi}\cdot\vec{Y}))}{(Z_0\vec{H})\cdot(1_{\Phi} \times \vec{Y})}$$

5.2.3.2 Berechnung der charakteristischen E-Vektor-Polarisationen

Die in 5.1.2.1 abgeleitete Vektorgleichung für den Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{P}_\epsilon$ (die "E-P_ϵ-Gleichung") lautet in welleneigenen Koordinaten

$$-\epsilon_o X \vec{E} = U \vec{P}_\epsilon + j \vec{P}_\epsilon \times \vec{Y} \quad := \quad -\epsilon_o X \begin{pmatrix} E_= \\ E_\dashv \\ E_\uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & jY_\uparrow & 0 \\ -jY_\uparrow & U & jY_= \\ 0 & -jY_= & U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{\epsilon=} \\ P_{\epsilon\dashv} \\ P_{\epsilon\uparrow} \end{pmatrix}$$

Die Kombination dieser Vektorgleichung mit der Wellengleichung in der Form, in der sie im vorhergehenden Abschnitt benutzt wurde, liefert ein System von Zusammenhängen zwischen den verschiedenen Feld-Vektorkoordinaten und dem Wellennormalvektor, welches wir in den folgenden Abschnitten ableiten wollen.

Zunächst kombinieren wir die dritte Zeile der Wellengleichung mit der dritten Zeile der E-P_ϵ-Gleichung:

$$-\epsilon_o X E_\uparrow = \begin{cases} X P_{\epsilon\uparrow} & \text{nach Wellengleichung} \\ -jY_= P_{\epsilon\dashv} + U P_{\epsilon\uparrow} & \text{nach E-}P_\epsilon\text{-Gleichung} \end{cases} \qquad \text{hieraus folgt: } \frac{P_{\epsilon\uparrow}}{P_{\epsilon\dashv}} = \frac{jY_=}{U - X}$$

Mit Hilfe der zweiten und dritten Zeile der Wellengleichung läßt sich das in eine Beziehung zwischen $E_\uparrow$ und $E_\dashv$ umformen:

$$P_{\epsilon\uparrow} = -\epsilon_o E_\uparrow$$

$$P_{\epsilon\dashv} = \epsilon_o ((n^c)^2 - 1) E_\dashv \qquad \text{hieraus folgt: } \frac{E_\uparrow}{E_\dashv} = -jY_= \frac{(n^c)^2 - 1}{U - X}$$

Eine Beziehung zwischen $E_=$ und $E_\dashv$ finden wir durch Kombination der ersten beiden Zeilen der Wellengleichung mit denen der E-P_ϵ-Gleichung:

$$-\epsilon_o X E_= = -X \frac{P_{\epsilon=}}{(n^c)^2 - 1} = U P_{\epsilon=} + jY_\uparrow P_{\epsilon\dashv}$$

$$-\epsilon_o X E_\dashv = -X \frac{P_{\epsilon\dashv}}{(n^c)^2 - 1} = -jY_\uparrow P_{\epsilon=} + U P_{\epsilon\dashv} + jY_= P_{\epsilon\uparrow} = -jY_\uparrow P_{\epsilon=} + \left(U - \frac{Y_=^2}{U - X}\right) P_{\epsilon\dashv}$$

Teilen der zweiten Gleichung durch die erste:

$$\frac{E_\dashv}{E_=} = \frac{P_{\epsilon\dashv}}{P_{\epsilon=}} \text{ (s. 5.2.3.1)} = P_\dashv = \frac{-jY_\uparrow + \left(U - \frac{Y_=^2}{U - X}\right) P_\dashv}{U + jY_\uparrow P_\dashv}$$

führt auf eine quadratische Gleichung für $P_\dashv$

$$P_\dashv^2 + \frac{Y_=^2}{jY_\uparrow (U - X)} P_\dashv + 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$P_{\dashv 1} = j\left(\frac{Y_=^2}{2\, Y_\uparrow (U - X)} - \sqrt{\left(\frac{Y_=^2}{2\, Y \ (U - X)}\right)^2 + 1}\right), \quad P_{\dashv 2} = j\left(\frac{Y_=^2}{2\, Y \ (U - X)} + \sqrt{\left(\frac{Y_=^2}{2\, Y \ (U - X)}\right)^2 + 1}\right)$$

$$\text{wobei } P_{\dashv 1} + P_{\dashv 2} = j \frac{Y_=^2}{Y_\uparrow (U - X)}, \quad P_{\dashv 1} \cdot P_{\dashv 2} = 1$$

5.2.3.3 Berechnung der charakteristischen Brechzahlen

Das Ergebnis des vorigen Abschnittes lautet verbal:
Für eine ebene Welle, die sich in Richtung einer vorgegebenen Wellennormalen im anisotropen, homogenen Plasma ausbreitet, gibt es nur zwei E-Vektor-Polarisationen, die mit den Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes verträglich sind.

Für jede dieser beiden "charakteristischen E-Vektorpolarisationen" ergibt sich ein charakteristischer Wert der Brechzahl n^c, wenn wir die erste Zeile der Wellengleichung mit der ersten Zeile der E-$P_{\leftarrow}$-Gleichung kombinieren:

Aus $\epsilon_0 X E_{=} = \frac{X P_{\leftarrow=}}{(n^c)^2 - 1} = -U P_{\leftarrow=} - jY_{\uparrow} P_{\leftarrow\perp}$ folgt $\underline{P_{\perp} = \frac{E_{\perp}}{E_{=}} = \frac{P_{\leftarrow\perp}}{P_{\leftarrow=}} = \frac{1}{-jY_{\uparrow}} \left(U + \frac{X}{(n^c)^2 - 1}\right)}$

Als Abkürzung führen wir ein folgende Hilfsgröße:

$$\underline{\mathcal{W} = U + \frac{X}{(n^c)^2 - 1} = -jY_{\uparrow} P_{\perp}}$$

Eine Bestimmungsgleichung für diese Hilfsgröße erhalten wir, indem wir die quadratische Gleichung für $P_{\perp}$ mit $(-jY_{\uparrow})^2$ multiplizieren. Diese Gleichung hat eine besonders übersichtliche Gestalt:

$$\underline{\mathcal{W}^2 - \frac{Y_{=}^2}{U - X} \mathcal{W} - Y_{\uparrow}^2 = 0}$$

Ihre Lösungen sind

$$\mathcal{W}_1 = \frac{Y_{=}^2}{2\,(U - X)} - \sqrt{\left(\frac{Y_{=}^2}{2\,(U - X)}\right)^2 + Y_{\uparrow}^2}\ , \quad \mathcal{W}_2 = \frac{Y_{=}^2}{2\,(U - X)} + \sqrt{\left(\frac{Y_{=}^2}{2\,(U - X)}\right)^2 + Y_{\uparrow}^2}$$

Hieraus ergeben sich die charakteristischen E-Vektorpolarisationen

$$P_{\perp 1} = \frac{1}{-jY_{\uparrow}} \mathcal{W}_1 \quad , \quad P_{\perp 2} = \frac{1}{-jY_{\uparrow}} \mathcal{W}_2$$

und die charakteristischen Brechzahlen zu

$$\underline{(n_1^c)^2 = 1 - \frac{X}{U - \mathcal{W}_1}} \quad , \quad \underline{(n_2^c)^2 = 1 - \frac{X}{U - \mathcal{W}_2}}$$

Diese Schreibweise läßt am besten die Beziehung zur relativen DK in der isotropnen Modellionosphäre erkennen (Abschn. 3.1, Ende)

$$\epsilon_{r,isotrop} = (n^c)^2_{isotrop} = 1 - \frac{X}{U}$$

5.2.3.4 Berechnung der charakteristischen Längs-Polarisationen

Abschließend führen wir noch Polarisationsgrößen ein, mit denen die Wellennormalkomponente $E_{\uparrow}$ des E-Vektors erfaßt wird. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten, von denen im folgenden Gebrauch gemacht werden wird: Wir beschreiben die "Längspolarisation"

entweder durch das Verhältnis der Normalkoordinaten zur Senkrechtkoordinaten ,

oder durch das Verhältnis der Normalkoordinaten zur Parallelkoordinaten:

$$P_{\uparrow\perp} = \frac{E_{\uparrow}}{E_{\perp}} \quad , \quad P_{\uparrow=} = \frac{E_{\uparrow}}{E_{=}} = \frac{E_{\uparrow}}{E_{\perp}}\frac{E_{\perp}}{E_{=}} = P_{\uparrow\perp}\cdot P_{\perp}$$

Die erste dieser beiden Polarisationen wurde bereits in 5.2.3.2 berechnet. Wir drücken sie jetzt mit der Hilfsgröße $\mathcal{W}$ aus:

$$P_{\uparrow\perp} = \frac{E_{\uparrow}}{E_{\perp}} = -jY_{=}\frac{(n^c)^2 - 1}{U - X} = \frac{jY_{=}X}{(U - X)\,(U - \mathcal{W})} = \frac{jY_{=}X}{(U - X)\,(U + jY_{\uparrow}P_{\perp})}$$

Hieraus folgt $P_{\uparrow=}$, ausgedrückt durch die Brechzahl, oder durch $P_{\perp}$, oder durch $\mathcal{W} = -jY_{\uparrow}P_{\perp}$:

$$P_{\uparrow=} = \frac{E_{\uparrow}}{E_{=}} = P_{\uparrow\perp}\cdot P_{\perp} = \frac{Y_{=}}{Y_{\uparrow}}\,\frac{U\,((n^c)^2 - 1) + X}{U - X} = \frac{-Y_{=}\,X\,\mathcal{W}}{Y_{\uparrow}\,(U - X)(U - \mathcal{W})}$$

$$= \frac{jY_{=}\,X\,P_{\perp}}{(U - X)(U + jY_{\uparrow}P_{\perp})} = \frac{jY_{=}\,X}{(U - X)(\frac{1}{P_{\perp}}\,U + jY_{\uparrow})}$$

5.2.3.5 Zusammenstellung der Beziehungen zwischen den Feldvektor-Koordinaten

Wir fassen zusammen: Für jede Wellennormal-Richtung ergeben sich aus den Grundgleichungen zwei mögliche, ebene Wellen, die sich voneinander unterscheiden

durch ihre E-Vektor-Polarisationen,
durch ihre Längspolarisationen, und
durch ihre komplexe Brechzahl.

Alle diese charakteristischen Größen ergeben sich aus der Lage des Wellennormalvektors relativ zum Gyrofrequenzvektor. Als zweckmäßiger Ausgangspunkt für ihre Berechnung dient uns die Hilfsgröße $\mathcal{W}$, welche als Lösung einer quadratischen Gleichung bestimmt werden kann (5.2.3.3). Hat man die drei Größen n^c , $P_{\perp}$ und $P_{\uparrow\perp}$ bzw. $P_{\uparrow=} = P_{\uparrow\perp}\cdot P_{\perp}$ bestimmt, so lassen sich zwischen den fünf Feldvektorkoordinaten der zugehörigen ebenen Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t)_{eb} = (1_{=}E_{=} + 1_{\perp}E_{\perp} + 1_{\uparrow}E_{\uparrow})\,\exp(j(\omega t - k_o n^c\,(1_{\uparrow}\cdot\vec{r}))) \,,$$

$$Z_o\vec{H}(\vec{r},t)_{eb} = \frac{1}{-jk_o}\,\mathrm{rot}(\vec{E}) = n^c(-1_{=}E_{\perp} + 1_{\perp}E_{=})\,\exp(j(\omega t - k_o n^c\,(1_{\uparrow}\cdot\vec{r})))$$

$$= (1_{=}Z_oH_{=} + 1_{\perp}Z_oH_{\perp})\,\exp(j(\omega t - k_o n^c\,(1_{\uparrow}\cdot\vec{r})))$$

Beziehungen angeben, die wir in der Tabelle 5.I zusammenstellen.

Wir entnehmen dieser Tabelle: Ist nur eine der fünf Vektorkoordinaten gegeben, so folgen die übrigen vier mit Hilfe der Brechzahl und der charakteristischen Polarisationen. Hieraus ergibt sich eine Reihe von möglichen Beschreibungsweisen für die charakteristischen Wellen, unter denen wir die günstigsten aussuchen möchten. Zu diesem Zweck müssen wir zunächst die einfachen Grenzfälle der Ausbreitung im anisotropen Ionosphärenplasma diskutieren.

Tabelle 5.I : Beziehungen zwischen den Feldvektor-Koordinaten einer charakteristischen Welle im anisotropen Ionosphärenplasma

$E_{=} =$	$E_{=}$	$\frac{1}{P_{\dashv}} E_{\dashv}$	$\frac{1}{P_{\Uparrow =}} E_{\Uparrow}$	$\frac{-1}{n^c} \frac{1}{P_{\dashv}} Z_oH_{=}$	$\frac{1}{n^c} Z_oH_{\dashv}$
$E_{\dashv} =$	$P_{\dashv} E_{=}$	$E_{\dashv}$	$\frac{1}{P_{\Uparrow \dashv}} E_{\Uparrow}$	$\frac{-1}{n^c} Z_oH_{=}$	$\frac{1}{n^c} P_{\dashv} Z_oH_{\dashv}$
$E_{\Uparrow} =$	$P_{\Uparrow =} E_{=}$	$P_{\Uparrow \dashv} E_{\dashv}$	$E_{\Uparrow}$	$\frac{-1}{n^c} P_{\Uparrow \dashv} Z_oH_{=}$	$\frac{1}{n^c} P_{\Uparrow =} Z_oH_{\dashv}$
$Z_oH_{=} =$	$-n^c P_{\dashv} E_{=}$	$-n^c E_{\dashv}$	$-n^c \frac{1}{P_{\Uparrow \dashv}} E_{\Uparrow}$	$Z_oH_{=}$	$-P_{\dashv} Z_oH_{\dashv}$
$Z_oH_{\dashv} =$	$n^c E_{=}$	$n^c \frac{1}{P_{\dashv}} E_{\dashv}$	$n^c \frac{1}{P_{\Uparrow =}} E_{\Uparrow}$	$- \frac{1}{P_{\dashv}} Z_oH_{=}$	$Z_oH_{\dashv}$

5.2.4 Diskussion einfacher Fälle der Ausbreitung im Ionosphärenplasma

Wir stellen einleitend die im vorigen Abschnitt 5.2.3 abgeleiteten Ausdrücke für die E-Vektor-Polarisationen, Brechzahlen und Längspolarisationen der charakteristischen Wellen zusammen:

$$P_{\uparrow 1,2} = \frac{\mathcal{W}_{1,2}}{-jY_{\uparrow}} \quad , \quad (n^c_{1,2})^2 = 1 - \frac{X}{U - \mathcal{W}_{1,2}}$$

$$P_{\uparrow\uparrow 1,2} = \frac{jY_{=}\, X}{(U - X)(U - \mathcal{W}_{1,2})} \quad , \quad P_{\uparrow = 1,2} = \frac{-Y_{=}\, X\, \mathcal{W}_{1,2}}{Y_{\uparrow}\,(U - X)(U - \mathcal{W}_{1,2})}$$

$$\mathcal{W}_{1,2} = \frac{Y_{=}^2}{2\,(U - X)} \mp \sqrt{\left(\frac{Y_{=}^2}{2\,(U - X)}\right)^2 + Y_{\uparrow}^2}$$

Diese Ausdrücke sind im allgemeinen sehr schwer zu überblicken. Sie vereinfachen sich in den folgenden Grenzfällen:

$Y_{=} = 0$: Wellennormalvektor parallel zu Gyrofrequenzvektor : Longitudinale Ausbreitung

$Y_{\uparrow} = 0$: Wellennormalvektor senkrecht zu Gyrofrequenzvektor : Transversale Ausbreitung

Diesen Grenzfällen nähern wir uns über die Näherungsfälle der

Quasi-longitudinalen Ausbreitung: $\left|\frac{Y_{=}^2}{2\,Y_{\uparrow}\,(U - X)}\right| \ll 1$, und der

Quasi-Transversalen Ausbreitung: $\left|\frac{Y_{=}^2}{2\,Y_{\uparrow}\,(U - X)}\right| \gg 1$.

5.2.4.1 Quasi-Longitudinale Ausbreitung

In diesem Falle wird näherungsweise

$$\mathcal{W}_1 = -Y_{\uparrow} \quad , \quad \mathcal{W}_2 = +Y_{\uparrow} \quad , \quad P_{\uparrow 1} = -j \quad , \quad P_{\uparrow 2} = +j$$

Diese E-Vektor-Polarisationen beschreiben eine zirkulare Welle. Dementsprechend finden wir für das Brechzahl-Quadrat die gleichen Werte, die wir in Abschn. 5.1.2.2 aus rein anschaulichen Überlegungen heraus für ein zirkular schwingendes E-feld gefunden hatten:

$$(n^c_1)^2 = 1 - \frac{X}{U + Y_{\uparrow}} \quad , \quad (n^c_2)^2 = 1 - \frac{X}{U - Y_{\uparrow}}$$

Die Längspolarisationen werden

$$P_{\uparrow\uparrow 1,2} = \frac{jY_{=}X}{(U - X)(U \pm Y_{\uparrow})} \quad , \quad P_{\uparrow = 1,2} = \frac{\pm Y_{=}X}{(U - X)(U \pm Y_{\uparrow})}$$

Im Grenzfall $Y_{=} = 0$ verschwindet die E-Vektor-Koordinate in Wellennormalrichtung, beide Wellen sind dann zirkular polarisiert, ihre E-Vektoren rotieren gegensinnig um die Richtung des Gyrofrequenzvektors. Sie sind dann parallel den zwei rotierenden Hauptachsen des Polarisierbarkeits-Tensors, den wir in 5.1.2.2 kennengelernt haben.

Die Richtungen der gegensinnig rotierenden E-Vektoren beschreiben wir nun durch zwei rotierende Einheitsvektoren $1_{\circlearrowright}$ und $1_{\circlearrowleft}$, die mit $1_{\Uparrow}$ eine Rechts- bzw. Linksschraube bilden:

$$1_{\circlearrowright} = 1_{=}\cos(\omega t) + 1_{\dashv}\sin(\omega t) \quad , \quad 1_{\circlearrowleft} = 1_{=}\cos(\omega t) - 1_{\dashv}\sin(\omega t)$$

In komplexer Form lautet diese Darstellung

$$1_{\circlearrowright} = (1_{=} - j1_{\dashv})\, e^{j\omega t} \qquad\qquad 1_{\circlearrowleft} = (1_{=} + j1_{\dashv})\, e^{j\omega t}$$

Ein rechts- bzw. links-zirkular schwingender E-Vektor

$$E_{\circlearrowright} = 1_{\circlearrowright}\, E_{\circlearrowright} \qquad \text{bzw.} \qquad E_{\circlearrowleft} = 1_{\circlearrowleft}\, E_{\circlearrowleft}$$

hat demzufolge die E-Vektor-Polarisation

$$P_{\dashv\circlearrowright} = -j = P_{\dashv 1} \qquad \text{bzw.} \qquad P_{\dashv\circlearrowleft} = +j = P_{\dashv 2}$$

Wir können also die beiden charakteristischen Wellen bei longitudinaler Ausbreitung als zwei zirkular polarisierte Wellen identifizieren. Die Rotation ihres elektrischen Vektors bildet mit dem Gyrofrequenzvektor eine Rechts- bzw. Linksschraube.

Die beiden charakteristischen Wellen erleiden bei longitudinaler Ausbreitung unterschiedliche Dämpfung. Das erkennen wir, wenn wir die beiden Brechzahl-Quadrate in Real- und Imaginärteile zerlegen: (Wir setzen ein $U = 1 - jZ$, vgl. 3.1)

$$(n_1^c)^2 = 1 - \frac{X\,(1 + Y_{\Uparrow})}{(1 + Y_{\Uparrow})^2 + Z^2} - j\,\frac{X\,Z}{(1 + Y_{\Uparrow})^2 + Z^2}$$

$$(n_2^c)^2 = 1 - \frac{X\,(1 - Y_{\Uparrow})}{(1 - Y_{\Uparrow})^2 + Z^2} - j\,\frac{X\,Z}{(1 - Y_{\Uparrow})^2 + Z^2}$$

Bei der Ausbreitung sehr langer Wellen ($f \leq 30$ kHz) wird $Y_{\Uparrow}$ dem Betrage nach erheblich größer als 1. Dann vereinfachen sich die beiden Formeln zu

$$(n_1^c)^2 = 1 - \frac{X\,Y_{\Uparrow}}{Y_{\Uparrow}^2 + Z^2} - j\,\frac{X\,Z}{Y_{\Uparrow}^2 + Z^2} \quad , \quad (n_2^c)^2 = 1 + \frac{X\,Y_{\Uparrow}}{Y_{\Uparrow}^2 + Z^2} - j\,\frac{X.Z}{Y_{\Uparrow}^2 + Z^2}$$

Für extrem lange Wellen ($f \leq 3$ kHz) wird der Faktor $X = \omega_N^2/\omega^2$ auch bei den in der tiefen Ionosphäre auftretenden geringen Elektronendichtewerten so groß, daß die zweiten Summanden dem Betrage nach erheblich größer werden als 1. Dann wird das unterschiedliche Verhalten der beiden Wellentypen besonders deutlich: Wir nehmen zunächst an, daß sich die Wellen parallel zu $\vec{Y}$ ausbreiten, daß $Y_{\Uparrow}$ also positiv ist. Dann liegt $(n_1^c)^2$ im dritten, $(n_2^c)^2$ im vierten Quadranten. Die zugehörigen Quadratwurzeln liegen beide im vierten Quadranten (die Imaginärteile beider n^c müssen negativ sein!), der Winkel von n_1^c jedoch liegt erheblich näher bei -90° als der von n_2^c. Das heißt nichts anderes, als daß der Imaginärteil von n_1^c größer ist als der von n_2^c, daß also die Welle 1 eine größere Dämpfung erleidet als Welle 2. Umgekehrtes Verhalten tritt ein, wenn sich beide Wellen in genau entgegengesetzter Richtung zu $\vec{Y}$ ausbreiten, $Y_{\Uparrow}$ also negativ ist. In jedem Fall kann sich ein zirkular polarisierter Wellentyp parallel zu den magnetischen Feldlinien mit geringer Dämpfung ausbreiten. Diese Tatsache führt auf das Phänomen der Whistler (siehe z.B. Kertz, 1971, S. 390).

5.2.4.2 Quasi-Transversale Ausbreitung

Im Falle der Quasi-Transversalen Ausbreitung wird näherungsweise

$$\varkappa_{1,2} = \frac{Y_=^2}{2\,(U - X)}\left(1 \mp \sqrt{1 + \left(\frac{2\,Y_\uparrow\,(U - X)}{Y_=^2}\right)^2}\right)$$

$$\simeq \frac{Y_=^2}{2\,(U - X)}\left(1 \mp \left(1 + 2\left(\frac{Y_\uparrow\,(U - X)}{Y_=^2}\right)^2\right)\right)$$

Damit:

$$\varkappa_1 \simeq -\frac{Y_\uparrow^2\,(U - X)}{Y_=^2}\,, \quad \varkappa_2 \simeq \frac{Y_=^2}{U - X}\,, \quad P_{\dashv 1} \simeq \frac{Y_\uparrow\,(U - X)}{jY_=^2}\,, \quad P_{\dashv 2} \simeq \frac{jY_=^2}{Y_\uparrow\,(U - X)}$$

Im Grenzfall $Y_\uparrow \rightarrow 0$ geht

$$P_{\dashv 1} \rightarrow 0 \qquad \text{und} \qquad P_{\dashv 2} \rightarrow j\infty$$

d.h.: Der E-Vektor von Welle 1 schwingt in der Bezugsebene, seine $\dashv$-Komponente ist Null, der E-Vektor von Welle 2 schwingt senkrecht zur Bezugsebene, seine $=$-Komponente ist Null.

Für die Längspolarisationen erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$P_{\uparrow\dashv 1} = \frac{jY_= X}{(U - X)\left(U + \frac{Y_\uparrow^2\,(U - X)}{Y_=^2}\right)}\,, \qquad P_{\uparrow\dashv 2} = \frac{jY_= X}{U\,(U - X) - Y_=^2}$$

$$P_{\uparrow = 1} = \frac{Y_\uparrow Y_=\, X}{U\,Y_=^2 + (U - X)\,Y_\uparrow^2}\,, \qquad P_{\uparrow = 2} = \frac{-Y_=^3\, X}{Y_\uparrow (U - X)\,(U\,(U - X) - Y_=^2)}$$

Im Grenzfall $Y_\uparrow \rightarrow 0$ gehen beide $P_{\uparrow\dashv}$ gegen endliche Werte

$$P_{\uparrow\dashv 1} \rightarrow \frac{jY_=\, X}{U\,(U - X)}\,, \qquad P_{\uparrow\dashv 2} \rightarrow \frac{jY_=\, X}{U\,(U - X) - Y_=^2}$$

Für Welle 1 geht jedoch gleichzeitig die $\dashv$-Komponente $E_\dashv$ gegen Null. Daher muß auch die Wellennormalkomponente verschwinden: Welle 1 geht bei transversaler Ausbreitung in eine linear polarisierte Welle über, deren E-Vektor parallel zum Gyrofrequenzvektor schwingt. Entsprechend verschwindet das Verhältnis $P_{\uparrow = 1}$ im Grenzfall $Y_\uparrow \rightarrow 0$.

Für Welle 2 verschwindet im Grenzfall $Y_\uparrow \rightarrow 0$ die $=$-Komponente, entsprechend geht das Verhältnis $P_{\uparrow = 2}$ gegen unendlich. Die Wellennormalkomponente behält einen endlichen Wert, die Welle geht also in eine elliptisch polarisierte Welle über, deren E-Vektor in der zum Gyrofrequenzvektor senkrechten Ebene schwingt.

Für die Brechzahlen n_1^c und n_2^c erhalten wir im Grenzfall $Y_\uparrow \rightarrow 0$ folgende Werte:

$$(n_1^c)^2 = 1 - \frac{X}{U - \varkappa_1} \rightarrow 1 - \frac{X}{U}\,, \qquad (n_2^c)^2 = 1 - \frac{X}{U - \varkappa_2} \rightarrow 1 - \frac{X\,(U - X)}{U\,(U - X) - Y_=^2}$$

Die Brechzahl (n_1^c) stimmt also mit dem Wert für fehlendes Magnetfeld überein (vgl. 3.1 und 5.1.2.2).

5.2.4.3 Ordentliche und außerordentliche Welle

Bisher war die Unterscheidung zwischen Welle 1 und Welle 2 eine rein mathematische: Wir definierten sie durch das Wurzelvorzeichen in der Lösung der quadratischen Gleichung für $\mathcal{N} = -jY_{\Phi}P_{\dashv}$ (s. 5.2.3.3 , negatives Vorzeichen für Welle 1, positives für Welle 2). Die transversale Ausbreitung gibt uns nun ein physikalisches Unterscheidungsmerkmal an die Hand. In diesem speziellen Fall ist der Brechungsindex der Welle 1 vom Magnetfeld völlig unabhängig. Für Welle 2 hingegen gibt es keine Ausbreitungsrichtung, bei der das Magnetfeld den Brechungsindex ungeändert läßt. Aus diesem Grunde wird Welle 1 fortan mit der physikalischen Bezeichnung "ordentliche Welle" , Welle 2 mit "außerordentliche Welle" versehen. Die Indizes 1 und 2 ersetzen wir durch die (umständlicheren , aber physikalisch begründeten) Indizes "ord" und "ex".

Die beiden Wellentypen der ordentlichen und außerordentlichen Welle treten im anisotropen Medium an die Stelle der TM- und TE-Welle im isotropen. Wir suchen eine Schreibweise, welche diese Analogie so weit wie möglich sichtbar werden läßt. Dabei lassen wir uns von folgenden Überlegungen leiten:

a) nach 5.2.3.5 (Tabelle 5.I) ist es möglich, jede der beiden Wellen durch ihre E-Vektor-Polarisation, ihre Längspolarisation , ihre Brechzahl und eine einzige Feldvektor-Koordinate zu beschreiben.

b) Diese Feldvektor-Koordinate muß so ausgesucht werden, daß für jede beliebige Ausbreitungsrichtung jede andere Feldvektor-Koordinate ausgerechnet werden kann. Hierbei müssen wir die zuvor behandelten Sonderfälle der Ausbreitung besonders beachten.

Der Sonderfall der longitudinalen Ausbreitung führt dazu, die Feldvektorkoordinate E_{Φ} für die Beschreibung der Welle auszuscheiden: Diese verschwindet nämlich bei longitudinaler Ausbreitung, sodaß die übrigen Feldvektorkoordinaten in diesem Fall nicht aus E_{Φ} berechnet werden können.

Bei transversaler Ausbreitung verschwindet:

$E_{\dashv}$ und damit $Z_oH_{=}$ für die ordentliche Welle, (vgl. 5.2.3.5 1)

$E_{=}$ und damit $Z_oH_{\dashv}$ für die außerordentliche Welle ,

sodaß $E_{\dashv}$ und $Z_oH_{=}$ für die Beschreibung der ordentlichen, $E_{=}$ und $Z_oH_{\dashv}$ der außerordentlichen Welle ausscheiden.

Es verbleiben folgende Möglichkeiten: Für die Phasenfaktoren schreiben wir

$$\varphi_{ord} = (\omega t - k_o\, n^c_{ord}\, (\vec{r}\cdot 1_{\Phi})) \;, \qquad \varphi_{ex} = (\omega t - k_o\, n^c_{ex}\, (\vec{r}\cdot 1_{\Phi}))$$

Die ordentliche Welle schreiben wir entweder

$$\vec{E}_{ord}(\vec{r},t) = (1_{=} + 1_{\dashv}P_{\dashv ord} + 1_{\Phi}P_{\Phi = ord})\, E_{= ord}\, \exp(j\varphi_{ord}) \;, \text{ daraus folgt}$$

$$Z_o\vec{H}_{ord}(\vec{r},t) = (-1_{=}P_{\dashv ord} + 1_{\dashv})\, n^c_{ord}\, E_{= ord}\, \exp(j\varphi_{ord}).$$

oder

$$Z_o\vec{H}_{ord}(\vec{r},t) = (-1_{=}P_{\dashv ord} + 1_{\dashv})\, Z_oH_{\dashv ord}\, \exp(j\varphi_{ord}) \;, \text{ daraus folgt}$$

$$\vec{E}_{ord}(\vec{r},t) = (1_{=} + 1_{\dashv}P_{\dashv ord} + 1_{\Phi}P_{\Phi = ord})\, \frac{1}{n^c_{ord}}\, Z_oH_{\dashv ord}\, \exp(j\varphi_{ord}) \;.$$

Die <u>außerordentliche Welle</u> schreiben wir <u>entweder</u>

$$\vec{E}_{ex}(\vec{r},t) = (1_= \frac{1}{P_{\dashv ex}} + 1_\dashv + 1_\Updownarrow P_{\Updownarrow \dashv ex})\, E_{\dashv ex} \exp(j\varphi_{ex}) \text{ , daraus folgt}$$

$$Z_o\vec{H}_{ex}(\vec{r},t) = (1_= - 1_\dashv \frac{1}{P_{\dashv ex}})\,(-n^c_{ex})\, E_{\dashv ex} \exp(j\varphi_{ex})$$

<u>oder</u>

$$Z_o\vec{H}_{ex}(\vec{r},t) = (1_= - 1_\dashv \frac{1}{P_{\dashv ex}})\, Z_oH_{=ex} \exp(j\varphi_{ex}) \text{ , daraus folgt}$$

$$\vec{E}_{ex}(\vec{r},t) = (1_= \frac{1}{P_{\dashv ex}} + 1_\dashv + 1_\Updownarrow P_{\Updownarrow \dashv ex}) \frac{Z_oH_{=ex}}{-n^c_{ex}} \exp(j\varphi_{ex}) \text{ .}$$

Die Wahl zwischen diesen Möglichkeiten ist eine Geschmacksfrage, die wir in möglichst enger Anlehnung an unsere Beschreibung des elektromagnetischen Feldes im isotropen Medium entscheiden:

Die ordentliche Welle wird im folgenden mit Hilfe von $Z_oH_{\dashv ord}$, die außerordentliche mit $E_{\dashv ex}$ beschrieben. <u>Der Index $\dashv$ wird dabei im folgenden weggelassen.</u>

Die Längspolarisation wird für die ordentliche Welle durch $P_{\Updownarrow = ord}$, für die außerordentliche durch $P_{\Updownarrow \dashv ex}$ beschrieben. <u>Die Indizes $\dashv$ und $=$ werden hierbei im folgenden weggelassen.</u> Wir bezeichnen demnach im folgenden

$$P_{\Updownarrow ord} = P_{\Updownarrow = ord} = \frac{E_{\Updownarrow ord}}{E_{= ord}} \quad , \quad P_{\Updownarrow ex} = P_{\Updownarrow \dashv ex} = \frac{E_{\Updownarrow ex}}{E_{\dashv ex}}$$

Damit erhalten wir die für den Rest dieser Ausarbeitung verwendete Schreibweise für die ordentliche und außerordentliche Welle (Phasenfaktor nicht mitgeschrieben):

$$Z_o\vec{H}_{ord} = (-1_= P_{\dashv ord} + 1_\dashv)\, Z_oH_{ord} \quad , \quad \vec{E}_{ex} = (1_= \frac{1}{P_{\dashv ex}} + 1_\dashv + 1_\Updownarrow P_{\Updownarrow ex})\, E_{ex}$$

$$\vec{E}_{ord} = (1_= + 1_\dashv P_{\dashv ord} + 1_\Updownarrow P_{\Updownarrow ord}) \frac{Z_oH_{ord}}{n^c_{ord}} \text{ , } Z_o\vec{H}_{ex} = (-1_= + 1_\dashv \frac{1}{P_{\dashv ex}})\, n^c_{ex}\, E_{ex}$$

Es muß an dieser Stelle jedoch darauf hingewiesen werden, daß die hier verwendete Unterscheidung zwischen ordentlicher und außerordentlicher Welle nach dem Wurzelvorzeichen auf Schwierigkeiten führt, da man nicht allgemein angeben kann, welchem Blatt der Riemannschen Ebene der Radikand

$$1 + \left(\frac{2\, Y_\Updownarrow (U - X)}{Y_=^2}\right)^2$$

zuzuordnen ist. Standart-Rechenprogramme (wie z.B. die Routine CSQRT im FORTRAN IV) berechnen diejenige Wurzel, deren Realteil positiv ist. Bei Verwendung eines solchen Verfahrens gilt für die Unterscheidung zwischen ordentlicher und außerordentlicher Welle ein von Booker angegebenes Kriterium (s.z.B. Ratcliffe, 1959):

Ist $X < 1$, so gilt das Minus-Zeichen für die ordentliche,
das Plus-Zeichen für die außerordentliche Welle.

Ist $X > 1$ und $Z < \left|\frac{Y_=^2}{2\, Y_\Updownarrow}\right|$, so gilt die gleiche Vorzeichenzuordnung, jedoch

ist $X > 1$ und $Z > \left|\frac{Y_=^2}{2\, Y_\Updownarrow}\right|$, so gilt das Plus-Zeichen für die ordentliche Welle,
das Minus-Zeichen für die außerordentliche.

5.3 Wellenpaare im homogenen, anisotropen Ionosphärenplasma

5.3.1 Einführung der Größe q^c für die ionosphärische Ausbreitung

In isotropen, homogenen Medien lernten wir Wellenpaare als Lösung der in kartesischen Koordinaten aufgeschriebenen Grundgleichungen kennen. (Abschn. 2.3 und 4.2.2)

Im anisotropen Plasma werden die Differentialgleichungen erheblich komplizierter. Wir verschieben ihre explizite Niederschrift auf das 7. Kapitel und nehmen hier nur die (einigermaßen plausible) Tatsache vorweg, daß auch im anisotropen Medium die Lösungen zu "Wellenpaaren" aus "aufsteigenden" und "absteigenden" Wellen zusammengefaßt werden können. Das gemeinsame Merkmal zweier Wellen, die ein Wellenpaar bilden, ist die x-Koordinate k_x ihres komplexen Wellenvektors.

Wir setzen - wie in allen vorhergegangenen Betrachtungen - voraus, daß die z,x-Ebene Ausbreitungsebene ist, das Feld also von der Ortskoordinate y nicht abhängt. Den komplexen Wellenvektor stellen wir dar durch die Vakuumwellenzahl k_o, die Brechzahl n^c und den komplexen Neigungswinkel $\Theta_\uparrow$ des Wellennormalvektors gegen die z-Achse:

$$\vec{k} = k_o\, n^c\, 1_\uparrow \;,\quad k_x = k_o\, n^c\, S \;,\quad k_z = k_o\, n^c\, C \;,\quad S = \sin(\Theta_\uparrow) \;,\; C = \cos(\Theta_\uparrow)$$

Wie in Kapitel 3 und 4 ist die Größe n^cS durch den Sinus S_o des Neigungswinkels einer von unten her schräg auf die Ionosphäre einfallenden, ebenen Welle, und durch das Brechungsgesetz vorgegeben:

$$n^cS = S_o \;,\quad \text{daher} \quad n^cC = n^c\sqrt{1 - S^2} = \sqrt{(n^c)^2 - S_o^2}$$

Für die Größe n^cC führen wir, in Anlehnung an Booker (s. Budden, 1961a), die Abkürzung q^c ein:

$$\underline{(q^c)^2 = (n^c)^2 - S_o^2} \;,\quad \underline{(q^c)^2 + S_o^2 = (n^c)^2}$$

Diese elementare Beziehung gilt, als Ausdruck des Brechungsgesetzes, auch im anisotropen Plasma.

Durch S_o ist mithin die x-Komponente der Wellenvektoren aller in der Ionosphäre sich ausbreitenden Wellen vorgegeben. Damit haben wir, im Vergleich zu Abschn. 5.2, eine neue Situation vor uns: Dort war der Wellennormalvektor $1_\uparrow$ vorgegeben, und wir fragten nach den charakteristischen Feldvektor-Polarisationen und Brechzahlen, die sich aus den Grundgleichungen ergeben. Hier ist nun die x-Komponente $k_x = k_oS_o$ des Wellenvektors vorgegeben, und wir fragen nach den z-Koordinaten $k_z = k_on^cC = k_oq^c$ der Wellenvektoren der zugehörigen auf- und absteigenden, ordentlichen und außerordentlichen Welle.

Im isotropen Medium erledigte sich diese Frage durch das Brechungsgesetz, da dort die Brechzahl nicht von der Ausbreitungsrichtung abhängt: Aus gegebenem S_o und n^c konnten wir q^c sofort nach der obenstehenden Gleichung hinschreiben.

Im anisotropen Medium hingegen ist die Brechzahl von dem unbekannten Neigungswinkel des Wellennormalvektors abhängig. Daher kann das Brechungsgesetz zur Bestimmung von q^c nicht gebraucht werden.

Zur Bestimmung von q^c aus gegebenem S_o gehen wir aus von der in 5.2.3.3 angegebenen quadratischen Bestimmungsgleichung für $\mathcal{N}$: Hierbei können wir die obenstehende Beziehung zwischen (n^c) und (q^c) ausnutzen, um q^c mit Hilfe von $\mathcal{N}$ zu bestimmen:

$$\underline{\mathcal{N}^2 - \frac{Y_=^2}{U - X}\mathcal{N} - Y_\uparrow^2 = 0} \quad \text{wobei } \mathcal{N} = -jY_\uparrow P_\dashv = U + \frac{X}{(n^c)^2 - 1} = U + \frac{X}{(q^c)^2 - C_o^2}$$

(wegen $C_o^2 = 1 - S_o^2$) . Hat man also $\mathcal{N}$ bestimmt, so ergibt sich n^c und q^c nach

$$\underline{(n^c)^2 = 1 - \frac{X}{U - \mathcal{N}}} \;,\quad \underline{(q^c)^2 = C_o^2 - \frac{X}{U - \mathcal{N}}}$$

5.3.2 Aufstellung der Bestimmungsgleichung für q^c ("Booker Quartic")

In die Bestimmungsgleichung für $\mathcal{W}$ ist einzusetzen

$$Y_{\parallel}^2 = Y^2 - Y_{\uparrow}^2 \;, \quad Y_{\uparrow}^2 = (1_{\uparrow}\cdot\vec{Y})^2 = (S\,Y_x + C\,Y_z)^2 \;, \quad S = \frac{S_o}{n^c} = \frac{S_o}{\sqrt{(q^c)^2 + S_o^2}} \;, \quad C = \frac{q^c}{\sqrt{(q^c)^2 + S_o^2}}$$

Damit wird die Bestimmungsgleichung

$$\mathcal{W}^2 - \frac{Y^2 - Y_{\uparrow}^2}{U - X}\mathcal{W} - Y_{\uparrow}^2 = 0 = \mathcal{W}^2 - \frac{Y^2}{U - X}\mathcal{W} - Y_{\uparrow}^2\left(1 - \frac{\mathcal{W}}{U - X}\right) \;, \text{ hierin } \mathcal{W} = U + \frac{X}{(q^c)^2 - C_o^2}$$

Umformung des dritten Summanden:

$$\frac{Y_{\uparrow}^2}{U - X}(U - X - \mathcal{W}) = \frac{Y_{\uparrow}^2}{U - X}\left(-X - \frac{X}{(q^c)^2 - C_o^2}\right) = -\frac{X\,Y_{\uparrow}^2}{U - X}\,\frac{(q^c)^2 + S_o^2}{(q^c)^2 - C_o^2}$$

$$= -\frac{X}{U - X}\,\frac{S_o Y_x^2 + (q^c)^2\,Y_z^2 + 2\,q^c\,S_o\,Y_x Y_z}{(q^c)^2 - C_o^2}$$

Die weiteren Umformungen haben den Zweck, die Bestimmungsgleichung für q^c so wenig wie möglich von einer quadratischen Gleichung für die Hilfsgröße $\mathcal{W}$ abweichen zu lassen.

$$\frac{S_o^2\,Y_x^2}{U - X}\,\frac{X}{(q^c)^2 - C_o^2} = \frac{S_o^2\,Y_x^2}{U - X}\left(U + \frac{X}{(q^c)^2 - C_o^2}\right) - \frac{S_o^2\,Y_x^2\,U}{U - X} \;,$$

$$\frac{Y_z^2}{U - X}\,\frac{(q^c)^2\,X}{(q^c)^2 - C_o^2} = \frac{Y_z^2}{U - X}\left(1 + \frac{C_o^2}{(q^c)^2 - C_o^2}\right)X = \frac{Y_z^2\,C_o^2}{U - X}\left(U + \frac{X}{(q^c)^2 - C_o^2}\right) + \frac{Y_z^2(X - U\,C_o^2)}{U - X} \;.$$

Wir erhalten für die Bestimmungsgleichung folgende Form

$$\left(U + \frac{X}{(q^c)^2 - C_o^2}\right)^2 - \frac{Y^2 - S_o^2 Y_x^2 - C_o^2 Y_z^2}{U - X}\left(U + \frac{X}{(q^c)^2 - C_o^2}\right)$$

$$- \frac{U\,S_o^2 Y_x^2 + (U\,C_o^2 - X)\,Y_z^2}{U - X} + 2\,X\,\frac{S_o Y_x Y_z}{U - X}\,\frac{q^c}{(q^c)^2 - C_o^2} = 0$$

Abgekürzt:

$$\underline{\mathcal{W}^2 - B_1\mathcal{W} - B_o + 2\,X\,B_s\,\frac{q^c}{(q^c)^2 - C_o^2} = 0}$$

Das ist dann eine rein quadratische Gleichung für $\mathcal{W}$, wenn der "Störkoeffizient" B_s verschwindet. Das tritt dann ein, wenn

entweder $S_o = 0$: Dann trifft die einfallende Welle senkrecht auf die Ionosphäre auf, C_o wird gleich 1, q^c gleich n^c, die Bestimmungsgleichung wird mit derjenigen für n^c (Abschn. 5.2.3.3) identisch;

oder $Y_x = 0$: Das ist bei vertikal gerichtetem Magnetfeld, also im Gebiet der magnetischen Pole der Fall;

oder $Y_z = 0$: Dann haben wir Ausbreitung bei horizontalem Magnetfeld, also in der Gegend des erdmagnetischen Aequators.

5.3.3 Lösung der Booker-Quartic

5.3.3.1 Lösung bei verschwindendem Störglied (Nullte Näherung)

Falls das Störglied $B_s = 0$, so können wir, entsprechend Abschn. 5.2.3.3 und 5.2.4.3, schreiben

$$\mathcal{N}_{ord}^{(0)} = \frac{B_1}{2} - \sqrt{\frac{B_1^2}{4} + B_o} \quad , \quad \mathcal{N}_{ex}^{(0)} = \frac{B_1}{2} + \sqrt{\frac{B_1^2}{4} + B_o}$$

Dann ergeben sich aus

$$(q^c)^2 = C_o^2 - \frac{X}{U - \mathcal{N}}$$

vier Lösungen der Bestimmungsgleichung für q^c, die jeweils einer auf- bzw. absteigenden ordentlichen und außerordentlichen Welle entsprechen:

$$\underline{q_1^c = q_{ord}^{\uparrow(0)} = +\sqrt{C_o^2 - \frac{X}{U - \mathcal{N}_{ord}^{(0)}}}} \quad , \quad \underline{q_3^c = q_{ord}^{\downarrow(0)} = -\sqrt{C_o^2 - \frac{X}{U - \mathcal{N}_{ord}^{(0)}}}}$$

$$\underline{q_2^c = q_{ex}^{\uparrow(0)} = +\sqrt{C_o^2 - \frac{X}{U - \mathcal{N}_{ex}^{(0)}}}} \quad , \quad \underline{q_4^c = q_{ex}^{\downarrow(0)} = -\sqrt{C_o^2 - \frac{X}{U - \mathcal{N}_{ex}^{(0)}}}}$$

5.3.3.2 Erste Näherung bei sehr kleinem Störglied

Ist das Störglied B_s von Null verschieden, so betrachten wir die soeben aufgeschriebene Lösung als nullte Näherung für die richtige Lösung. (Durch den hochgestellten, eingeklammerten Index wollen wir den Grad der Näherung andeuten.) Diese Nullte Näherung verwenden wir zur Bestimmung einer verbesserten Lösung, indem wir sie in das Störglied der vollständigen, quadratischen Gleichung einsetzen:

$$\left(U + \frac{X}{(q_j^{(1)})^2 - C_o^2}\right)^2 - B_1 \left(U + \frac{X}{(q_j^{(1)})^2 - C_o^2}\right) - \left(B_o - 2\,X\,B_s \frac{q_j^{(0)}}{(q_j^{(0)})^2 - C_o^2}\right) = 0$$

Der Index j (= 1 ... 4) bezeichnet die vier Lösungen in der unter 5.3.3.1 angegebenen Reihenfolge. Wir können diese Gleichung als Bestimmungsgleichung für

$$\mathcal{N}_j^{(1)} = U + \frac{X}{(q_j^{(1)})^2 - C_o^2}$$

ansehen, in der das konstante Glied, im Vergleich zur Bestimmungsgleichung für $\mathcal{N}_j^{(0)}$, um

$$\Delta B_{o,j}^{(0)} = -2\,B_s\,q_j^{(0)} \frac{X}{(q_j^{(0)})^2 - C_o^2} = -2\,B_s\,q_j^{(0)}\,(\mathcal{N}_j^{(0)} - U)$$

geändert wurde.

Um die hierdurch hervorgerufene Änderung der Lösungen q_j^c

$$\Delta q_j^c = \frac{dq_j^{(0)}}{dB_o}\,\Delta B_{o,j}^{(0)} = \frac{dq_j^{(0)}}{d\mathcal{N}_j^{(0)}}\,\frac{d\mathcal{N}_j^{(0)}}{dB_o}\,\Delta B_{o,j}^{(0)}$$

zu bestimmen, schreiben wir

$$\mathcal{N}_j^{(0)} = \frac{B_1}{2} + s_{Vj} \cdot \sqrt{\frac{B_1^2}{4} + B_o} \quad , \quad q_j^{(0)} = s_{qj} \cdot \sqrt{C_o^2 - \frac{X}{U - \mathcal{N}_j^{(0)}}}$$

mit $s_{Vj} = \begin{cases} -1 & \text{für } j = 1, 3 \\ +1 & \text{für } j = 2, 4 \end{cases}$ und $s_{qj} = \begin{cases} +1 & \text{für } j = 1, 2 \\ -1 & \text{für } j = 3, 4 \end{cases}$

Die Berechnung ergibt damit

$$\frac{d\mathcal{W}_j^{(0)}}{dB_o} = \frac{s_{Vj}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{B_1^2}{4} + B_o}}\,, \quad \frac{dq_j^{(0)}}{d\mathcal{W}_j^{(0)}} = \frac{s_{qj}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{c_o^2 - \frac{X}{U - \mathcal{W}_j^{(0)}}}}\,\frac{-X}{(\mathcal{W}_j^{(0)} - U)^2} = \frac{-X}{2\,q_j^{(0)}(\mathcal{W}_j^{(0)} - U)^2}$$

folglich

$$q_j^{(1)} = q_j^{(0)} + \frac{dq_j^{(0)}}{d\mathcal{W}_j^{(0)}}\,\frac{d\mathcal{W}_j^{(0)}}{dB_o}\,\Delta B_{o,j}^{(0)} = q_j^{(0)} + \frac{s_{Vj}}{2}\,\frac{B_s}{\sqrt{\frac{B_1^2}{4} + B_o}}\,\frac{X}{(\mathcal{W}_j^{(0)} - U)}$$

Schreiben wir diese Lösungen einzeln auf, so erkennen wir, daß die q-Werte für die auf- und absteigenden Wellen nicht nur dem Vorzeichen nach , sondern auch dem Zahlenwert nach verschieden ausfallen:

$$q_{ord}^{\uparrow(1)} = +\sqrt{c_o^2 - \frac{X}{U - \mathcal{W}_{ord}^{(0)}}} - \frac{B_s}{2\sqrt{\frac{B_1^2}{4} + B_o}}\,\frac{X}{(\mathcal{W}_{ord}^{(0)} - U)}$$

$$q_{ex}^{\uparrow(1)} = +\sqrt{c_\alpha^2 - \frac{X}{U - \mathcal{W}_{ex}^{(0)}}} + \frac{B_s}{2\sqrt{\frac{B_1^2}{4} + B_o}}\,\frac{X}{(\mathcal{W}_{ex}^{(0)} - U)}$$

$$q_{ord}^{\downarrow(1)} = -\sqrt{c_o^2 - \frac{X}{U - \mathcal{W}_{ord}^{(0)}}} - \frac{B_s}{2\sqrt{\frac{B_1^2}{4} + B_o}}\,\frac{X}{(\mathcal{W}_{ord}^{(0)} - U)}$$

$$q_{ex}^{\downarrow(1)} = -\sqrt{c_\alpha^2 - \frac{X}{U - \mathcal{W}_{ex}^{(0)}}} + \frac{B_s}{2\sqrt{\frac{B_1^2}{4} + B_\alpha}}\,\frac{X}{(\mathcal{W}_{ex}^{(0)} - U)}$$

5.3.3.3 Iterative Bestimmung von q^c

Die Weiterführung der Annäherung bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten: Aus einer i-ten Näherung berechnen wir die (i+1)-te Näherung nach

$$\left(U + \frac{X}{(q_j^{(i+1)})^2 - c_o^2}\right)^2 - B_1\left(U + \frac{X}{(q_j^{(i+1)})^2 - c_\alpha^2}\right) - \left(B_o - 2\,B_s\,\frac{X\,q_j^{(i)}}{(q_j^{(i)})^2 - c_\alpha^2}\right) = 0$$

Das betrachten wir als quadratische Gleichung für $\mathcal{W}_j^{(i+1)}$, deren konstantes Glied, $B_{o,j}^{(i+1)}$, sich im Vergleich zu dem konstanten Glied der Gleichung für die i-te Näherung, $B_{o,j}^{(i)}$, geändert hat um

$$\Delta B_{o,j}^{(i)} = B_{o,j}^{(i+1)} - B_{o,j}^{(i)} = -2\,B_s X\left(\frac{q_j^{(i)}}{(q_j^{(i)})^2 - c_o^2} - \frac{q_j^{(i-1)}}{(q_j^{(i-1)})^2 - c_o^2}\right)$$

$$= -2\,B_s\left(q_j^{(i)}\,(\mathcal{W}_j^{(i)} - U) - q_j^{(i-1)}\,(\mathcal{W}_j^{(i-1)} - U)\right)$$

Man erhält als nächstfolgende Verbesserung

$$q_j^{(i+1)} = q_j^{(i)} + \Delta q_j^{(i)} = q_j^{(i)} + \frac{dq_j^{(i)}}{d\mathcal{W}_j^{(i)}}\,\frac{d\mathcal{W}_j^{(i)}}{dB_{o,j}^{(i)}}\,\Delta B_{o,j}^{(i)}$$

wobei die Ableitungen genauso berechnet werden können, wie beim Übergang von der nullten zur ersten Näherung.

6. Reflexion an einer homogenen, anisotropen Modellionosphäre

6.1 Einführung der Matrizenschreibweise

6.1.1 Wellenpaar-Ansatz im Vakuum

Wie in Kap. 3 nehmen wir an, daß unterhalb der Ebene z = 0 Vakuum sei, und daß oberhalb z = 0 die Elektronendichte und die Stoßzahl einen endlichen, konstanten Wert haben. Dann haben wir unterhalb z = 0 ein TM- und ein TE-Wellenpaar mit vorgegebenem Neigungswinkel $\Theta_{\uparrow o}$ anzusetzen: $(\cos(\Theta_{\uparrow o}) = C_o,\ \sin(\Theta_{\uparrow o}) = S_o)$

$$Z_o\vec{H}_{tmo} = Z_o\vec{H}^{\uparrow}_{tmo} + Z_o\vec{H}^{\downarrow}_{tmo} = 1_y(Z_oH^{\uparrow}_{tmo} + Z_oH^{\downarrow}_{tmo})$$

$$= 1_y(Z_oH^{\uparrow}_{\perp o}\exp(-jk_oC_oz) + Z_oH^{\downarrow}_{\perp o}\exp(+jk_oC_oz))\ \exp(j(\omega t - k_oS_ox))$$

$$\vec{E}_{teo} = \vec{E}^{\uparrow}_{teo} + \vec{E}^{\downarrow}_{teo} = -1_y(E^{\uparrow}_{teo} + E^{\downarrow}_{teo})$$

$$= -1_y(E^{\uparrow}_{\perp o}\exp(-jk_oC_oz) + E^{\downarrow}_{\perp o}\exp(+jk_oC_oz))\ \exp(j(\omega t - k_oS_ox))$$

Die Horizontalkoordinaten vereinigen wir nun zu einer Viererspalte, des-gleichen die Beträge der Feldvektoren. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Spalten (vgl. 3.2.1) wird dann durch eine 4 X 4-Matrix vermittelt:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_x \\ Z_oH_y \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_o & 0 & -C_o & 0 \\ 0 & C_o & 0 & -C_o \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_oH^{\uparrow}_{tmo} \\ E^{\uparrow}_{teo} \\ Z_oH^{\downarrow}_{tmo} \\ E^{\downarrow}_{teo} \end{pmatrix}$$

Vollständige Analogie zu Abschn. 3.2 erreichen wir durch Einführung der Spalten

$$\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_x \end{pmatrix},\quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} Z_oH_y \\ -E_y \end{pmatrix},\quad \mathbf{F}^{\uparrow}_o = \begin{pmatrix} Z_oH^{\uparrow}_{tmo} \\ E^{\uparrow}_{teo} \end{pmatrix},\quad \mathbf{F}^{\downarrow}_o = \begin{pmatrix} Z_oH^{\downarrow}_{tmo} \\ E^{\downarrow}_{teo} \end{pmatrix}$$

mit deren Hilfe die Matrizen-gleichung folgende Gestalt erhält:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_o\,\underline{\underline{I}} & -C_o\,\underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\uparrow}_o \\ \mathbf{F}^{\downarrow}_o \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In dieser Schreibweise werden die Reflexionskoeffizienten R_{tm} und R_{te} (vgl. 2.3.3) zu einer "Reflexionsmatrix" $\underline{\underline{R}}$ vereinigt, desgleichen die Horizontalkomponenten-verhältnisse L_{tm} und L_{te} zu einer "L-Matrix" :

$$\mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} Z_oH_y \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{tm} & 0 \\ 0 & L_{te} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_x \end{pmatrix} = \underline{\underline{L}} \cdot \mathbf{F}_x$$

$$\mathbf{F}^{\downarrow}_o = \begin{pmatrix} Z_oH^{\downarrow}_{tmo} \\ E^{\downarrow}_{teo} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{tm} & 0 \\ 0 & R_{te} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_oH^{\uparrow}_{tmo} \\ E^{\uparrow}_{teo} \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}} \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_o$$

Die Matrizen $\underline{\underline{R}}$ und $\underline{\underline{L}}$ sind hier in der Diagonalform niedergeschrieben, die sich aus der Reflexion an isotropen Ionosphären-Modellen ergibt (Kap. 3 und 4). Wir werden in diesem Abschnitt sehen, daß durch die Anisotropie auch die außerhalb der Hauptdiagonalen von $\underline{\underline{L}}$ und $\underline{\underline{R}}$ stehenden Glieder ungleich Null werden. Dadurch ändert sich jedoch an der formalen Auflösung des Zusammenhanges zwischen den Horizontal-Koordinaten und den Feldvektor-Beträgen nichts:

Die Matrizengleichung kann in genauer Analogie zu Abschn. 3.2.3 umgekehrt werden:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_o^{\uparrow} \\ \mathbf{F}_o^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_o^{\uparrow} \\ \underline{\underline{R}} \cdot \mathbf{F}_o^{\uparrow} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_o} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} \\ \frac{-1}{C_o} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \underline{\underline{L}} \cdot \mathbf{F}_x \end{pmatrix}$$

Damit folgt für den Reflexionsfaktor die allgemeine Matrizenform

$$\underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{L}}\, C_o - \underline{\underline{I}}) \cdot (\underline{\underline{L}}\, C_o + \underline{\underline{I}})^{-1}$$

Durch diese Gleichung wird die Berechnung der Reflexionsmatrix reduziert auf die Berechnung der L-Matrix

6.1.2 Matrixform des Reflexionsfaktors der isotropen Modellionosphäre

Zur Einübung der in diesem Abschnitt verwendeten Schreibweise wiederholen wir die Reflexionsfaktorberechnung von Abschn. 3.2.3 :

In der isotropen Modellionosphäre setzen wir oberhalb der Trennebene je eine aufsteigende TM- und TE-Welle an:

$$Z_o \vec{H}_{tm} = 1_y Z_o H_{tm}^{\uparrow} = 1_y Z_o H_{\perp}^{\uparrow} \exp(-jk_o n^c C\, z) \exp(j(\omega t - k_o S_o x))$$

$$\vec{E}_{te} = -1_y E_{te}^{\uparrow} = -1_y E_{\perp}^{\uparrow} \exp(-jk_o n^c C\, z) \exp(j(\omega t - k_o S_o x))$$

Für den Zusammenhang zwischen den Horizontalkoordinaten und den Feldvektor-Beträgen erhalten wir folgende Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ Z_o H_x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Z_o H_y \\ -E_y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} q^c/\epsilon_r & Z_o H_{tm}^{\uparrow} \\ q^c/u_r & E_{te}^{\uparrow} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Z_o H_{tm}^{\uparrow} \\ E_{te}^{\uparrow} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} q^c/\epsilon_r & 0 \\ 0 & q^c/u_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H_{tm}^{\uparrow} \\ E_{te}^{\uparrow} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H_{tm}^{\uparrow} \\ E_{te}^{\uparrow} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}_x \cdot \mathbf{F}^{\uparrow} \\ \underline{\underline{C}}_y \cdot \mathbf{F}^{\uparrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \underline{\underline{L}} \cdot \mathbf{F}_x \end{pmatrix}$$

Hierin ist für die isotrope Modellionosphäre $\underline{\underline{C}}_y$ gleich der Einheitsmatrix $\underline{\underline{I}}$. Für die L-Matrix erhalten wir die allgemeine Darstellung

$$\mathbf{F}_y = \underline{\underline{L}} \cdot \mathbf{F}_x = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{C}}_x \cdot \mathbf{F}^{\uparrow} = \underline{\underline{C}}_y \cdot \mathbf{F}^{\uparrow} \qquad \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{C}}_y \cdot \underline{\underline{C}}_x^{-1}$$

Bei isotroper Reflexion ist $\underline{\underline{L}}$ eine Diagonalmatrix

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \epsilon_r/q^c & 0 \\ 0 & /u_r/q^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{tm} & 0 \\ 0 & L_{te} \end{pmatrix}$$

Das hat zur Folge, daß auch $\underline{\underline{R}}$ eine Diagonalmatrix wird

$$\underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{L}}\, C_o - \underline{\underline{I}}) \cdot (\underline{\underline{L}}\, C_o + \underline{\underline{I}})^{-1} = \begin{pmatrix} (\frac{\epsilon_r}{q^c} C_o - 1) & 0 \\ 0 & (\frac{/u_r}{q^c} C_o - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\epsilon_r C_o}{q^c} + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\frac{/u_r C_o}{q^c} + 1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{tm} & 0 \\ 0 & R_{te} \end{pmatrix}$$

6.2 Berechnung des Reflexionsfaktors für die anisotrope Modellionosphäre

6.2.1 Die charakteristischen Wellen in der Ionosphäre und ihre welleneigenen Koordinatensysteme

In der anisotropen Modellionosphäre haben wir - anstelle der TM- und TE-Welle - je eine aufsteigende Welle vom ordentlichen und vom außerordentlichen Typ anzusetzen. Die x-Koordinate k_x der Wellenvektoren beider Wellen ist durch das Brechungsgesetz vorgegeben:

$$k_x = k_o n^c_{ord} S_{ord} = k_o n^c_{ex} S_{ex} = k_o S_o \quad . \qquad \text{(vgl. Abschn. 5.3)}$$

Die z-Koordinaten werden durch die beiden "aufsteigenden" Lösungen der Booker-Quartic bestimmt:

$$k^{\uparrow}_{z,ord} = k_o n^c_{ord} C^{\uparrow}_{ord} = k_o q^{\uparrow}_{ord} \quad , \quad k^{\uparrow}_{z,ex} = k_o n^c_{ex} C^{\uparrow}_{ex} = k_o q^{\uparrow}_{ex}$$

(Die hochgestellten Indizes $\uparrow$ lassen wir in diesem Abschnitt weg, da wir in der homogenen Modellionosphäre nur aufsteigende Wellen betrachten wollen.)

Die Wellennormalvektoren der beiden aufsteigenden, charakteristischen Wellen sind

$$1_{\uparrow,ord} = 1_x S_{ord} + 1_z C_{ord} = \frac{1}{\sqrt{q^2_{ord} + S_o^2}} (1_x S_o + 1_z q_{ord})$$

$$(q^2 + S_o^2 = (n^c)^2)$$

$$1_{\uparrow,ex} = 1_x S_{ex} + 1_z C_{ex} = \frac{1}{\sqrt{q^2_{ex} + S_o^2}} (1_x S_o + 1_z q_{ex})$$

Damit ergibt sich für jede Welle die Wellennormalkomponente und die Transversalkomponente des Gyrofrequenzvektors, sowie die Richtungscosinus der welleneigenen Einheitsvektoren $1_{\dashv}$ und $1_{=}$ (Abschn. 5.2.2) :

$$Y_{\uparrow} = 1_{\uparrow} \cdot \vec{Y} \quad , \quad Y_{=} = \sqrt{Y^2 - Y^2_{\uparrow}} \quad , \quad 1_{\dashv} = \frac{1_{\uparrow} \times \vec{Y}}{Y_{=}} \quad , \quad 1_{=} = 1_{\dashv} \times 1_{\uparrow} = \frac{\vec{Y} - 1_{\uparrow} Y_{\uparrow}}{Y_{=}}$$

In Abschn. 5.2.2.2 hatten wir gesehen, daß für den Übergang vom (x,y,z)- zum (=,⊣,↑)-System die beiden Richtungscosinus

$$c_{=y} = \frac{Y_y}{Y_{=}} \quad \text{und} \quad c_{\dashv y} = \frac{C\, Y_x - S\, Y_z}{Y_{=}} = \frac{q\, Y_x - S_o Y_z}{\sqrt{q^2 + S_o^2}\; Y_{=}}$$

bekannt sein müssen:

$$\begin{pmatrix} 1_{=} \\ 1_{\dashv} \\ 1_{\uparrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\, c_{\dashv y} & c_{=y} & -S\, c_{\dashv y} \\ -C\, c_{=y} & c_{\dashv y} & S\, c_{=y} \\ S & 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_x \\ 1_y \\ 1_z \end{pmatrix}$$

Für die Umkehr dieses Zusammenhanges drücken wir C und S durch q, S_o und $n^c = \sqrt{q^2 + S_o^2}$ aus:

$$\begin{pmatrix} 1_x \\ 1_y \\ 1_z \end{pmatrix} = \frac{1}{n^c} \begin{pmatrix} q\, c_{\dashv y} & -q\, c_{=y} & S_o \\ n^c c_{=y} & n^c c_{\dashv y} & 0 \\ -S_o c_{\dashv y} & S_o c_{=y} & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_{=} \\ 1_{\dashv} \\ 1_{\uparrow} \end{pmatrix}$$

Weiterhin folgen aus den q-Werten die E-Vektor-Polarisationen und Längspolarisationen:

$$P_{\dashv ord} = \frac{E_{\dashv ord}}{E_{=ord}} = \frac{1}{-jY_{\uparrow ord}} \left(U + \frac{X}{q^2_{ord} - C_o^2}\right) \quad , \quad P_{\dashv ex} = \frac{E_{\dashv ex}}{E_{=ex}} = \frac{1}{-jY_{\uparrow ex}} \left(U + \frac{X}{q^2_{ex} - C_o^2}\right)$$

$$P_{\uparrow ord} = \frac{E_{\uparrow ord}}{E_{=ord}} = -jY_{=ord} \frac{q^2_{ord} - C_o^2}{U - X} P_{\dashv ord} \quad , \quad P_{\uparrow ex} = \frac{E_{\uparrow ex}}{E_{\dashv ex}} = -jY_{=ex} \frac{q^2_{ex} - C_o^2}{U - X}$$

Damit haben wir alle Größen zusammengestellt, die wir brauchen, um den Ansatz für die beiden aufsteigenden Wellen in der Ionosphäre zu formulieren. Entsprechend den Überlegungen in Abschn. 5.2.4.3 drücken wir die ordentliche Welle durch $Z_oH_{\dashv ord}$, die außerordentliche durch durch $E_{\dashv ex}$ aus:

$$Z_o\vec{H}_{ord} = (-1_= P_\dashv + 1_\dashv)_{ord}\, Z_oH^{\uparrow}_{ord}$$

$$\vec{E}_{ord} = (1_= + 1_\dashv P_\dashv + 1_\uparrow P_\uparrow)_{ord} \frac{Z_oH^{\uparrow}_{ord}}{n^c_{ord}} \quad , \quad Z_oH^{\uparrow}_{ord} = Z_oH^{\uparrow}_{\dashv ord}\exp(j(\omega t - k_o n^c_{ord}(S_{ord}x + C_{ord}z)))$$

$$\vec{E}_{ex} = (1_= \frac{1}{P_\dashv} + 1_\dashv + 1_\uparrow P_\uparrow)_{ex}\, E^{\uparrow}_{ex}$$

$$Z_o\vec{H}_{ex} = (-1_= + 1_\dashv \frac{1}{P_\dashv})_{ex}\, n^c_{ex}\, E^{\uparrow}_{ex} \quad , \quad E^{\uparrow}_{ex} = E^{\uparrow}_{\dashv ex}\exp(j(\omega t - k_o n^c_{ex}(S_{ex}x + C_{ex}z)))$$

Damit ergibt sich für das Feld im anisotropen Medium folgende Koordinatendarstellung im x,y,z-System:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{n^c_{ord}} \begin{pmatrix} q\, c_{\dashv y} & -q\, c_{=y} & S_o \\ n^c c_{=y} & n^c c_{\dashv y} & 0 \\ -S_o c_{\dashv y} & S_o c_{=y} & q \end{pmatrix}_{ord} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ P_\dashv \\ P_\uparrow \end{pmatrix}_{ord} \frac{Z_oH^{\uparrow}_{ord}}{n^c_{ord}} + \frac{1}{n^c_{ex}} \begin{pmatrix} q\, c_{\dashv y} & -q\, c_{=y} & S_o \\ n^c c_{=y} & n^c c_{\dashv y} & 0 \\ -S_o c_{\dashv y} & S_o c_{=y} & q \end{pmatrix}_{ex} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{P_\dashv} \\ 1 \\ P_\uparrow \end{pmatrix}_{ex} E^{\uparrow}_{ex}$$

$$\begin{pmatrix} Z_oH_x \\ Z_oH_y \\ Z_oH_z \end{pmatrix} = \frac{1}{n^c_{ord}} \begin{pmatrix} q\, c_{\dashv y} & -q\, c_{=y} & S_o \\ n^c c_{=y} & n^c c_{\dashv y} & 0 \\ -S_o c_{\dashv y} & S_o c_{=y} & q \end{pmatrix}_{ord} \cdot \begin{pmatrix} -P_\dashv \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{ord} Z_oH^{\uparrow}_{ord} + \frac{1}{n^c_{ex}} \begin{pmatrix} q\, c_{\dashv y} & -q\, c_{=y} & S_o \\ n^c c_{=y} & n^c c_{\dashv y} & 0 \\ -S_o c_{\dashv y} & S_o c_{=y} & q \end{pmatrix}_{ex} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{P_\dashv} \\ 0 \end{pmatrix}_{ex} n^c_{ex}\, E_{ex}$$

6.2.2 Matrixdarstellung der horizontalen Vektorkoordinaten

Aus der obenstehenden Darstellung des Feldes in der Modellionosphäre ziehen wir die x- und y-Koordinaten heraus und ordnen sie in der in 6.1 eingeführten Weise:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(n^c_{ord})^2}\,(q\,(c_{\dashv y} - c_{=y}P_\dashv) + S_oP_\uparrow)_{ord} & \frac{1}{n^c_{ex}}\,(q\,(\frac{c_{\dashv y}}{P_\dashv} - c_{=y}) + S_oP_\uparrow)_{ex} \\ \frac{q_{ord}}{n^c_{ord}}\,(-c_{\dashv y}P_\dashv - c_{=y})_{ord} & q_{ex}\,(-c_{\dashv y} - \frac{c_{=y}}{P_\dashv})_{ex} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_oH^{\uparrow}_{ord} \\ E^{\uparrow}_{ex} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_oH_y \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_{\dashv y} - c_{=y}P_\dashv)_{ord} & n^c_{ex}(\frac{c_{\dashv y}}{P_\dashv} - c_{=y})_{ex} \\ \frac{1}{n^c_{ord}}\,(-c_{\dashv y}P_\dashv - c_{=y})_{ord} & (-c_{\dashv y} - \frac{c_{=y}}{P_\dashv})_{ex} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_oH^{\uparrow}_{ord} \\ E^{\uparrow}_{ex} \end{pmatrix}$$

Die Polarisationen und Richtungscosinus fassen wir zusammen in folgenden Abkürzungen:

$$(c_{\dashv y} - c_{=y}P_\dashv)_{ord} = \Gamma^{tm}_{ord} \qquad (\frac{c_{\dashv y}}{P_\dashv} - c_{=y})_{ex} = \Gamma^{tm}_{ex}$$

$$(-c_{\dashv y}P_\dashv - c_{=y})_{ord} = \Gamma^{te}_{ord} \qquad (-c_{\dashv y} - \frac{c_{=y}}{P_\dashv})_{ex} = \Gamma^{te}_{ex}$$

Damit gelangen wir zu den Matrizengleichungen

$$\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^c_{ord}}(q\Gamma^{tm} + S_oP_{\Phi})_{ord} & \frac{1}{n^c_{ex}}(q\Gamma^{tm} + S_oP_{\Phi})_{ex} \\ q_{ord}\Gamma^{te}_{ord} & q_{ex}\Gamma^{te}_{ex} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{Z_oH^{\uparrow}_{ord}}{n^c_{ord}} \\ E^{\uparrow}_{ex} \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}_x \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}$$

$$\mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} Z_oH_y \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^c_{ord}\Gamma^{tm}_{ord} & n^c_{ex}\Gamma^{tm}_{ex} \\ \Gamma^{te}_{ord} & \Gamma^{te}_{ex} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{Z_oH^{\uparrow}_{ord}}{n^c_{ord}} \\ E^{\uparrow}_{ex} \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}_y \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}$$

Ein Vergleich mit Abschn. 6.1.2 zeigt auf den ersten Blick, um wieviel komplizierter die Berechnung des Reflexionsfaktors durch den Einfluß der Anisotropie wird. Ehe wir diese Berechnung vorführen, soll die physikalische Bedeutung der Elemente der Matrizen $\underline{\underline{C}}_x$ und $\underline{\underline{C}}_y$ noch etwas weiter überlegt werden.

6.2.3 Die horizontalen Polarisations-Verhältnisse der charakteristischen Wellen

Die Matrizengleichungen der vorhergehenden Abschnitte besagen: Das Feld oberhalb $z = 0$ ist aus zwei aufsteigenden, charakteristischen Wellen zusammengesetzt, deren jede durch eine Lösung der Bookerquartic, durch eine Brechzahl, einen E-Vektor- und eine Längspolarisation gekennzeichnet ist. Daraus folgt für jede der beiden Wellen, daß auch die horizontalen Koordinaten ihrer Feldvektoren untereinander bestimmte, charakteristische Verhältnisse haben.

a) Das Verhältnis $(Z_oH_x)/(-E_y)$ ist für jede der beiden Wellen gleich ihrem q-Wert:

$$\left(\frac{Z_oH_x}{-E_y}\right)_{ord} = q_{ord} \quad , \quad \left(\frac{Z_oH_x}{-E_y}\right)_{ex} = q_{ex}$$

Diese Beziehung entspricht der Beziehung $(Z_oH_x)/(-E_y) = q^c/u_r$ in 6.1.2 und 3.2 . Wir können $(Z_oH_x)/(-E_y)$ physikalisch als "<u>normierte TE-Admittanz</u>" interpretieren.

b) Das Verhältnis $(Z_oH_y)/(Z_oH_x)$ bezeichnen wir als "<u>horizontale H-Vektor-Polarisation</u>":

$$p_{Hord} = \frac{Z_oH_{yord}}{Z_oH_{xord}} = \frac{n^c_{ord}}{q_{ord}}\frac{\Gamma^{tm}_{ord}}{\Gamma^{te}_{ord}} \quad , \quad p_{Hex} = \frac{Z_oH_{yex}}{Z_oH_{xex}} = \frac{n^c_{ex}}{q_{ex}}\frac{\Gamma^{tm}_{ex}}{\Gamma^{te}_{ex}}$$

Durch Multiplikation mit $q = (Z_oH_x)/(-E_y)$ erhalten wir hieraus die Verhältnisse $(Z_oH_y)/(-E_y)$. Diese Größen können wir als Admittanzen interpretieren, durch die die Kopplung zwischen TM- und TE-Anteil der ebenen Welle dargestellt wird.

c) Das Verhältnis $E_x/(-E_y)$ bezeichnen wir als "<u>horizontale E-Vektor-Polarisation</u>":

$$p_{Eord} = \frac{E_{xord}}{-E_{yord}} = \frac{(q\Gamma^{tm} + S_oP_{\Phi})_{ord}}{n^c_{ord}\Gamma^{te}_{ord}} \quad , \quad p_{Eex} = \frac{E_{xex}}{-E_{yex}} = \frac{(q\Gamma^{tm} + S_oP_{\Phi})_{ex}}{n^c_{ex}\Gamma^{te}_{ex}}$$

Mit Hilfe von p_E , p_H und q läßt sich auch für jede Welle die "<u>normierte TM-Admittanz</u>" $(Z_oH_y)/E_x$ angeben:

$$\left(\frac{Z_oH_y}{E_x}\right)_{ord,\,ex} = \left(\frac{Z_oH_y}{-E_y}\right)_{ord,ex}\left(\frac{-E_y}{E_x}\right)_{ord,ex} = \frac{p_{Hord,ex}\, q_{ord,ex}}{p_{Eord,ex}}$$

Mit diesen Abkürzungen können wir den obenstehenden Matrizengleichungen eine sehr übersichtliche Form geben, welche später (im 7. Kapitel) eine wichtige Rolle spielen wird.

Wir können nämlich unter Ausnutzung von

$$\frac{(q\,\Gamma^{tm} + S_o P_\uparrow)_{ord,ex}}{n^c_{ord,ex}} = p_{Eord,ex}\,\Gamma^{te}_{ord,ex}\ ,\ n^c_{ord,ex}\,\Gamma^{tm}_{ord,ex} = p_{Hord,ex}\,q_{ord,ex}\,\Gamma^{te}_{ord,ex}$$

die Faktoren $\Gamma^{te}_{ord,ex}$ ausklammern und die Matrizengleichung folgendermaßen schreiben

$$\begin{pmatrix} E_x \\ Z_o H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{Eord} & p_{Eex} \\ q_{ord} & q_{ex} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\Gamma^{te}_{ord}}{n^c_{ord}} & 0 \\ 0 & \Gamma^{te}_{ex} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\uparrow}_{ord} \\ E^{\uparrow}_{ex} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_x = \underline{\underline{C}}_x \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}$$

$$\begin{pmatrix} Z_o H_y \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_{Hord}\ q_{ord}) & (p_{Hex}\ q_{ex}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\Gamma^{te}_{ord}}{n^c_{ord}} & 0 \\ 0 & \Gamma^{te}_{ex} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\uparrow}_{ord} \\ E^{\uparrow}_{ex} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_y = \underline{\underline{C}}_y \cdot \mathbf{F}^{\uparrow} = \underline{\underline{L}} \cdot \mathbf{F}_x$$

6.2.4 Berechnung der L-Matrix und der R-Matrix

Die L-Matrix bestimmt sich aus den beiden Matrizen $\underline{\underline{C}}_x$ und $\underline{\underline{C}}_y$, wie in 6.1.2 gezeigt (vgl. auch 3.2.3) durch

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{C}}_y \cdot \underline{\underline{C}}_x^{-1}$$

Die im vorigen Abschnitt abgeleitete Darstellung der beiden Matrizen mit Hilfe der horizontalen Polarisationen ist darum so bequem, weil der beiden Matrizen gemeinsame Faktor mit $\Gamma^{te}_{ord,ex}$ durch Kürzen fortfällt. Wir erhalten durch Ausführen der Matrizenmultiplikation

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} (p_{Hord}\ q_{ord}) & (p_{Hex}\ q_{ex}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{Eord} & p_{Eex} \\ q_{ord} & q_{ex} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} (p_{Hord}\ q_{ord}) & (p_{Hex}\ q_{ex}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{ex} & -p_{Eex} \\ -q_{ord} & p_{Eord} \end{pmatrix}}{(p_{Eord}\ q_{ex} - p_{Eex}\ q_{ord})}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} (p_{Hord} - p_{Hex})\ q_{ord}\ q_{ex} & (p_{Eord}\ p_{Hex}\ q_{ex} - p_{Eex}\ p_{Hord}\ q_{ord}) \\ (q_{ex} - q_{ord}) & (p_{Eord} - p_{Eex}) \end{pmatrix}}{(p_{Eord}\ q_{ex} - p_{Eex}\ q_{ord})} = \begin{pmatrix} L^{tm}_{tm} & L^{tm}_{te} \\ L^{te}_{tm} & L^{te}_{te} \end{pmatrix}$$

Bei anisotroper Reflexion sind alle vier Elemente der L-Matrix von Null verschieden.

Das hat zur Folge, daß auch in der Reflexionsmatrix alle vier Elemente von Null verschieden sind: Wir setzen in die in 6.1.1 angegebene Matrizengleichung für $\underline{\underline{R}}$ ein

$$\underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{L}}\ C_o - \underline{\underline{I}}) \cdot (\underline{\underline{L}}\ C_o + \underline{\underline{I}})^{-1} = \begin{pmatrix} (L^{tm}_{tm}\ C_o - 1) & L^{tm}_{te}\ C_o \\ L^{te}_{tm}\ C_o & (L^{te}_{te}\ C_o - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (L^{tm}_{tm}\ C_o + 1) & L^{tm}_{te}\ C_o \\ L^{te}_{tm}\ C_o & (L^{te}_{te}\ C_o + 1) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} ((L^{tm}_{tm}\ C_o - 1)(L^{te}_{te}\ C_o + 1) - L^{tm}_{te}\ L^{te}_{tm}\ C_o^2) & 2\ L^{tm}_{te}\ C_o \\ 2\ L^{te}_{tm}\ C_o & ((L^{te}_{te}\ C_o - 1)(L^{tm}_{tm}\ C_o + 1) - L^{te}_{tm}\ L^{tm}_{te}\ C_o^2) \end{pmatrix}}{(L^{tm}_{tm}\ C_o + 1)(L^{te}_{te}\ C_o + 1) - L^{tm}_{te}\ L^{te}_{tm}\ C_o^2}$$

$$= \begin{pmatrix} R^{tm}_{tm} & R^{tm}_{te} \\ R^{te}_{tm} & R^{te}_{te} \end{pmatrix}$$

Die außerhalb der Hauptdiagonalen der R-Matrix stehenden Elemente werden als "Konversionsfaktoren" bezeichnet.

6.2.5 Schrägeinfallsnäherungen für die Elemente der R-Matrix

Der Wert der im vorhergehenden abgeleiteten Form der Reflexionsfaktormatrix wird dann klar, wenn man sich die - für die Langwellenausbreitung besonders wichtigen - Näherungen für schrägen Einfall überlegt. Wenn C_o so klein wird, daß alle Glieder mit C_o^2 vernachlässigt werden können, so können wir die Glieder der Hauptdiagonalen der R-Matrix folgendermaßen annähern: (vgl. zum folgenden Abschn. 3.3)

$$R_{tm}^{tm} = \frac{(L_{tm}^{tm} C_o - 1) - \dfrac{L_{te}^{tm} L_{tm}^{te} C_o^2}{(L_{te}^{te} C_o + 1)}}{(L_{tm}^{tm} C_o + 1) - \dfrac{L_{te}^{tm} L_{tm}^{te} C_o^2}{(L_{te}^{te} C_o + 1)}} \simeq \frac{L_{tm}^{tm} C_o - 1}{L_{tm}^{tm} C_o + 1} \simeq - \exp(-2 L_{tm}^{tm} C_o)$$

$$R_{te}^{te} = \frac{(L_{te}^{te} C_o - 1) - \dfrac{L_{te}^{tm} L_{tm}^{te} C_o^2}{(L_{tm}^{tm} C_o + 1)}}{(L_{te}^{te} C_o + 1) - \dfrac{L_{te}^{tm} L_{tm}^{te} C_o^2}{(L_{tm}^{tm} C_o + 1)}} \simeq \frac{L_{te}^{te} C_o - 1}{L_{te}^{te} C_o + 1} \simeq - \exp(-2 L_{te}^{te} C_o)$$

Die Größen L_{tm}^{tm} und L_{te}^{te} spielen demzufolge für die Diskussion von R_{tm}^{tm} und R_{te}^{te} die gleiche Rolle wie L_{tm} und L_{te} bei der Diskussion von R_{tm} und R_{te} in Kap. 3 . Insbesondere können sie zur Abschätzung der Funktionen R_{tm}^{tm} und R_{te}^{te} in der Nähe von $C_o = 0$ herangezogen werden. Wir erhalten die gleichen exponentiellen Näherungsfunktionen, die wir schon bei der isotropen Reflexion kennengelernt haben.

Die Konversionsfaktoren R_{te}^{tm} und R_{tm}^{te} können in der Nähe von $C_o = 0$ durch lineare Näherungen beschrieben werden

$$R_{te}^{tm} \simeq 2 L_{te}^{tm} C_o \quad , \qquad R_{tm}^{te} \simeq 2 L_{tm}^{te} C_o$$

6.3 Diskussion einfacher Fälle

Es gibt nur einen einzigen Sonderfall, in dem sich die Reflexionfaktor-Matrix in geschlossener Form ausrechnen läßt: Dies tritt ein, wenn 1. das Magnetfeld horizontal ist, und wenn 2. die Ausbreitungsebene senkrecht zum magnetischen Meridian ist. Diesen Fall behandeln wir unter 6.3.2 . Ein weiterer Sonderfall, daß das Magnetfeld senkrecht steht, gestattet eine strenge Berechnung des Reflexionsfaktors nur für senkrechte Inzidenz (Budden, 1961a , pg. 116), ist also für die Langwellenausbreitung ziemlich uninteressant. Im Allgemeinen müssen auch für die einfachen, homogenen Ionosphärenmodelle alle Elemente der Reflexionsfaktor-Matrix mit erheblichem Rechenaufwand einzeln bestimmt werden. Unter gewissen, vereinfachenden Annahmen, die uns in diesem Abschnitt beschäftigen, kann der Rechenaufwand etwas herabgesetzt werden.

Wir werden uns im folgenden auf die Berechnung der Elemente der L-Matrix beschränken, da die R-Matrix mit ihrer Hilfe leicht berechnet werden kann (Abschn. 6.2).

6.3.1 Reflexion in der Nähe des magnetischen Pols

In Anlehnung an das Vorgehen Budden's (1961a) gehen wir von der Bestimmungsgleichung für die Hilfsgröße $\mathcal{N}$ aus (Abschnitt 5.2.3.3 und 5.3.1)

$$\mathcal{N}^2 - \frac{Y_=^2}{U - X}\mathcal{N} - Y_\Uparrow^2 = 0 \quad , \text{wobei} \quad \mathcal{N} = U + \frac{X}{(n^c)^2 - 1} = U + \frac{X}{(q^c)^2 - c_o^2}$$

Budden's Lösung beruht auf der Annahme, daß die Beträge der (noch nicht berechneten!) Größen

$$q_{ord,ex} = \sqrt{c_o^2 - \frac{X}{U - \mathcal{N}_{ord,ex}}} = n^c_{ord,ex}\, c_{ord,ex}$$

infolge der hohen Stoßzahlverluste in der tiefen Ionosphäre (also großen Imaginärteiles von $U = 1 - jZ$) erheblich größer ausfallen müssen als 1 .
Dann folgt aus dem Brechungsgesetz, daß die Wellen in der Ionosphäre nahezu senkrecht aufsteigen müssen, gleichgültig, wie schräg die einfallende Welle unterhalb der Ionosphäre auf die Trennebene auftrifft. Dann folgt weiter, daß in der Nähe des Pols die zur Wellennormalen parallele Komponente des Gyrofrequenzvektors $Y_\Uparrow$

a) erheblich größer ist als die Transversalkomponente $Y_=$,
b) vom Einfallswinkel nahezu unabhängig ist.

Hieraus folgt schließlich, daß die Ausbreitung innerhalb der Ionosphäre durch die Näherung der Quasi-Longitudinalen Ausbreitung (Abschn. 5.2.4.1) erfaßt werden kann.

Die Berechtigung aller dieser Annahmen für bestimmte Ausbreitungswege auf der Nordhalbkugel erwies Budden (l.c., siehe auch Wait and Perry, 1957) nachträglich durch einige Testrechnungen, auf die in diesem Zusammenhang nicht näher eingegangen wird.

Die quasi-longitudinale Näherung besagt:

$$\mathcal{N}_{ord} = -Y_\Uparrow \;, \quad \mathcal{N}_{ex} = +Y_\Uparrow \;, \quad q_{ord} = \sqrt{c_o^2 - \frac{X}{U + Y_\Uparrow}} \;, \quad q_{ex} = \sqrt{c_o^2 - \frac{X}{U - Y_\Uparrow}}$$

Hierbei ist $Y_\Uparrow$ unter dem Pol gleich Y , für genügend hohe magnetische Breiten (60° und mehr) darf es mit der Zenitkomponente von $\vec{Y}$ gleichgesetzt werden (Abschn. 5.1.2.4).

Nun betrachten wir die Einheitsvektoren $1_\dashv$ und $1_=$ (Abschn. 5.2.2 und 6.2.1) (Bild 6.1) und erhalten (mit $\vec{Y} \approx 1_z Y_z$)

$$1_\dashv \approx -1_y \quad , \text{folglich} \quad c_{\dashv y} \approx -1 \quad , \quad c_{=y} \approx 0$$

Außerdem sind bei longitudinaler Ausbreitung auch die Polarisationsgrößen für den E-Vektor vom Einfallswinkel nahezu unabhängig (vgl. 5.2.4.1):

$$P_{\dashv ord} \cong -j \;, \quad P_{\dashv ex} \cong +j \;, \quad P_{\Uparrow ord} \cong P_{\Uparrow ex} \cong 0$$

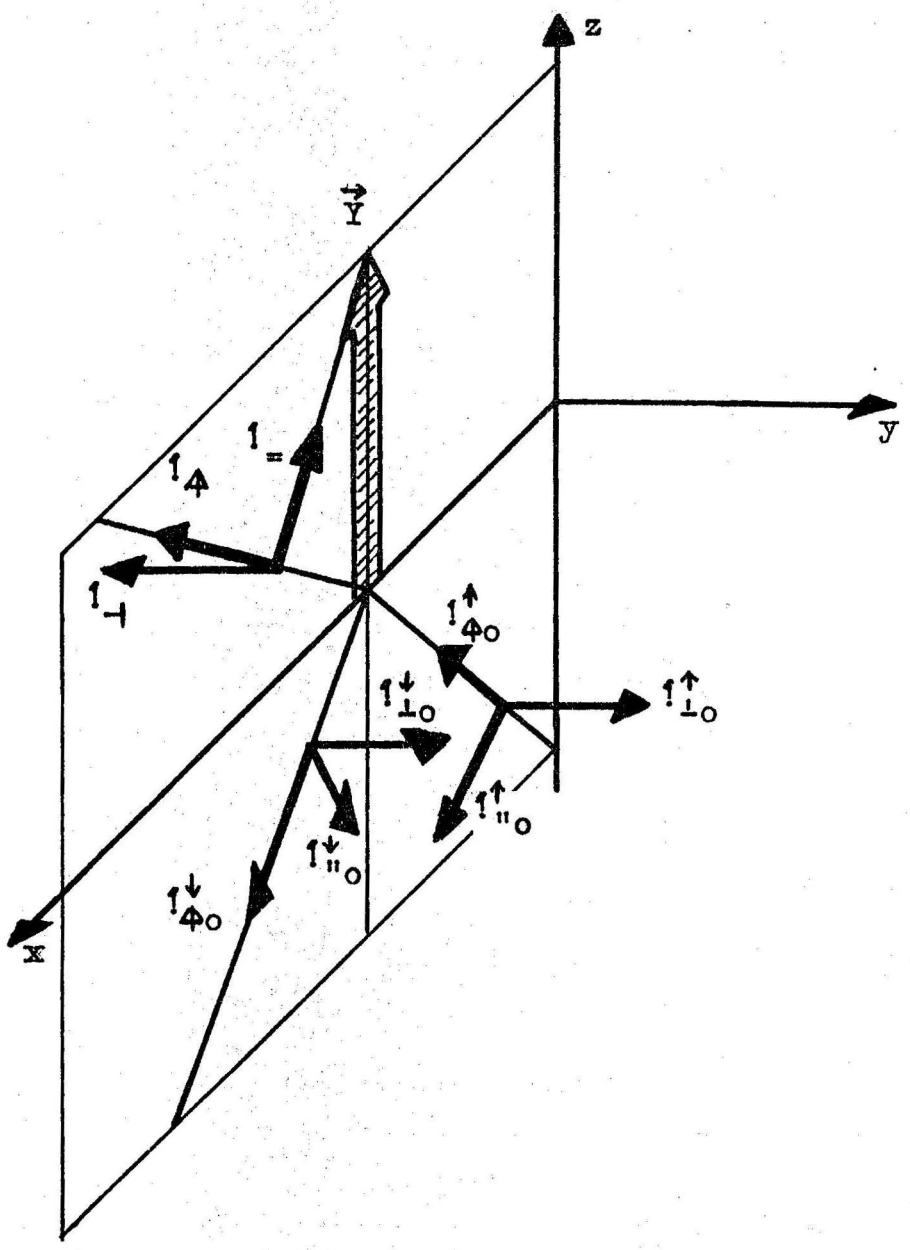


Bild 6.1: Welleneigene Koordinatensysteme unterhalb und innerhalb der Ionosphäre in der Nähe des magnetischen Nordpols

Mit diesen einfachen Größen gehen wir in die Matrizengleichungen des Abschnittes 6.2.2 ein:

$$\Gamma^{tm}_{ord} = (c_{+y} - c_{=y}P_{+})_{ord} = -1 \qquad \Gamma^{tm}_{ex} = (\frac{1}{P_{+}} c_{-y} - c_{=y})_{ex} = j$$

$$\Gamma^{te}_{ord} = (-c_{+y}P_{+} - c_{=y})_{ord} = -j \qquad \Gamma^{te}_{ex} = (-c_{+y} - c_{=y} \frac{1}{P_{+}})_{ex} = 1$$

und erhalten den Zusammenhang

$$\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} E_x \\ Z_o H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-q_{ord}}{(n^c_{ord})^2} & j\frac{q_{ex}}{n^c_{ex}} \\ -j\frac{q_{ord}}{n^c_{ord}} & q_{ex} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\uparrow}_{ord} \\ E^{\uparrow}_{ex} \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}_x \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}$$

$$\mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} Z_o H_y \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & j\, n^c_{ex} \\ \frac{-j}{n^c_{ord}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\uparrow}_{ord} \\ E^{\uparrow}_{ex} \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}_y \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}$$

Nach Ausklammern des beiden Matrizen gemeinsamen Faktors $\begin{pmatrix} \frac{-j}{n^c_{ord}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (vgl. 6.2.3)

erhalten wir für die L-Matrix den gut übersehbaren Ausdruck

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{C}}_y \cdot \underline{\underline{C}}_x^{-1} = \begin{pmatrix} -j\, n^c_{ord} & j\, n^c_{ex} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -j\frac{q_{ord}}{n^c_{ord}} & j\frac{q_{ex}}{n^c_{ex}} \\ q_{ord} & q_{ex} \end{pmatrix}^{-1}$$

Mit $q_{ord} = n^c_{ord}\, C_{ord}$ und $q_{ex} = n^c_{ex}\, C_{ex}$ gelangen wir schließlich zu der Form

$$\underline{\underline{L}} = \frac{\begin{pmatrix} n^c_{ord}\, n^c_{ex}\, (C_{ord} + C_{ex}) & j(n^c_{ex}\, C_{ord} - n^c_{ord}\, C_{ex}) \\ j(n^c_{ex}\, C_{ex} - n^c_{ord}\, C_{ord}) & (C_{ord} + C_{ex}) \end{pmatrix}}{(n^c_{ord} + n^c_{ex})\, C_{ord}\, C_{ex}}$$

Die Berechnung der R-Matrix führt, wie man jetzt leicht nachvollziehen kann, auf die von Budden (1961a) und Wait (1962) angegebenen Ausdrücke. Die Schrägeinfallsnäherung nach Abschn. 6.2.5 führt auf die gleichen Ausdrücke, wie sie von Wait (1962, pg. 245) auf anderem Wege gefunden wurden.

6.3.2 Transversale Ausbreitung in der Nähe des magnetischen Aequators

Bei Ausbreitung senkrecht zum magnetischen Meridian in der Nähe des magnetischen Aequators hat der Gyrofrequenzvektor nur eine Komponente in y-Richtung : $\vec{Y} = 1_y Y_y$. Der Einheitsvektor $1_=$ ist dann in jedem Fall parallel zu $\vec{Y}$, der Einheitsvektor $1_\dashv$ liegt in der Ausbreitungsebene (Bild 6.2). Für die y-Komponenten beider gilt daher

$$c_{\dashv y} = 0 \quad , \quad c_{=y} = +1 \text{ für Ausbreitung von Ost nach West,}$$
$$c_{=y} = -1 \text{ für Ausbreitung von West nach Ost.}$$

Die beiden Wellen in der Ionosphäre laufen dann auf jeden Fall senkrecht zu $\vec{Y}$, gleichgültig, unter welchem Winkel $\Theta_{\Uparrow o}$ die einfallende Welle auf die Ionosphäre trifft. Die Wellennormalkomponente $Y_\Uparrow$ des Gyrofrequenzvektors ist also in jedem Fall 0, die Transversalkomponente $Y_=$ gleich dem Betrag Y . Daher kann die Bestimmungsgleichung für die Hilfsgröße $\mathcal{W}$ ohne Näherung gelöst werden: (vgl. Abschn. 5.2.4.2)

$$\mathcal{W}^2 - \frac{Y_=^2}{U - X}\mathcal{W} - Y_\Uparrow^2 = 0 = \mathcal{W}\left(\mathcal{W} - \frac{Y^2}{U - X}\right) \qquad \left(\mathcal{W} = U + \frac{X}{(q^c)^2 - c_o^2}\right)$$

$$\mathcal{W}_{ord} = 0 \,, \quad \mathcal{W}_{ex} = \frac{Y^2}{U - X} \,, \quad q_{ord}^2 = c_o^2 - \frac{X}{U} \,, \quad q_{ex}^2 = c_o^2 - \frac{X}{U - \frac{Y^2}{U - X}}$$

Für die E-Vektor-Polarisationen ergibt sich

$$P_{\dashv ord} = 0 \,, \; P_{\dashv ex} = j\infty \,, \; \frac{1}{P_{\dashv ex}} = 0 \,, \; P_{\Uparrow ord} = \frac{E_{\Uparrow ord}}{E_{=ord}} = 0, \; P_{\Uparrow ex} = \frac{E_{\Uparrow ex}}{E_{\dashv ex}} = \frac{j\, Y_= X}{U\,(U - X) - Y^2}$$

Damit erhalten wir

$$\Gamma_{ord}^{tm} = (c_{\dashv y} - c_{=y} P_\dashv)_{ord} = 0 \qquad \Gamma_{ex}^{tm} = \left(c_{\dashv y}\frac{1}{P_\dashv} - c_{=y}\right)_{ex} = -c_{=y} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Gamma_{ord}^{te} = (-c_{\dashv y} P_\dashv - c_{=y})_{ord} = -c_{=y} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \qquad \Gamma_{ex}^{te} = \left(-c_{\dashv y} - c_{=y}\frac{1}{P_\dashv}\right)_{ex} = 0$$

und aus der in 6.2.2 abgeleiteten Matrizengleichung wird

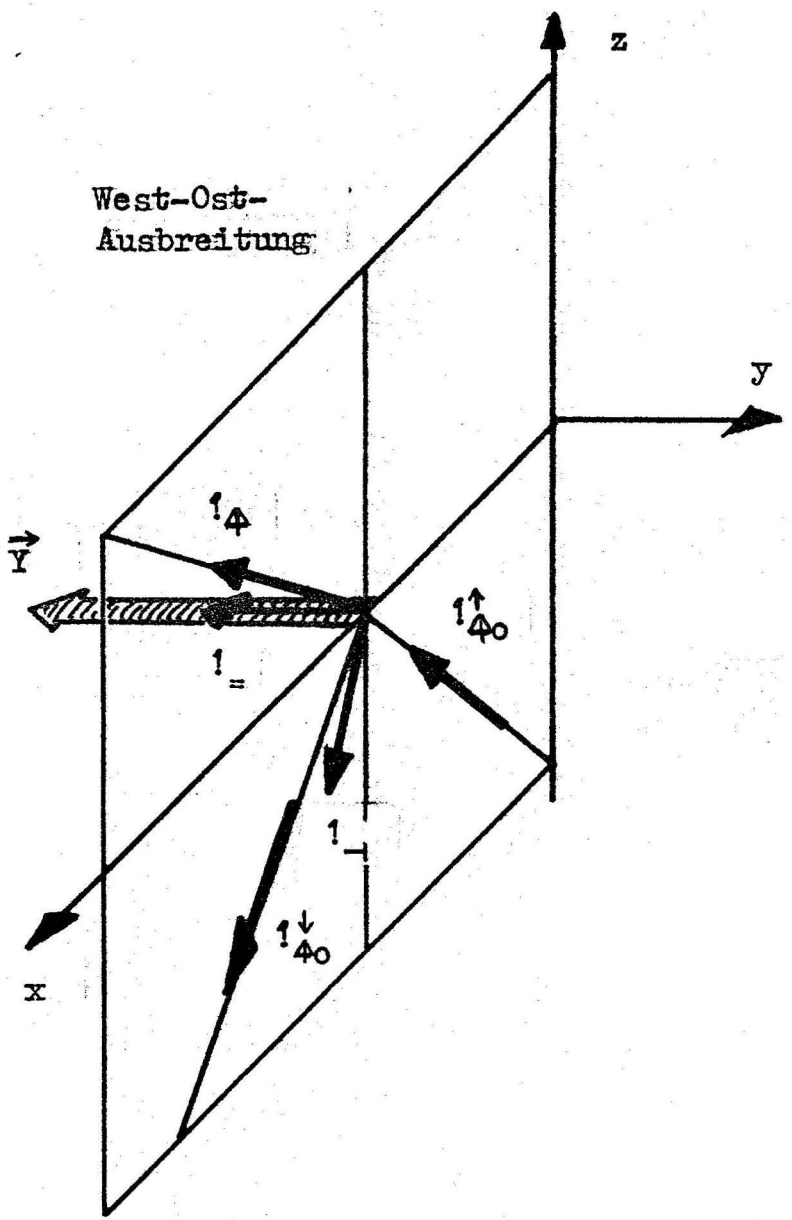
$$\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} E_x \\ Z_o H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n_{ex}^c}\left(-c_{=y}\, q_{ex} + S_o\, P_{\Uparrow ex}\right) \\ -c_{=y}\frac{q_{ord}}{n_{ord}^c} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H_{ord}^\uparrow \\ E_{ex}^\uparrow \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}_x \cdot \mathbf{F}^\uparrow$$

$$\mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} Z_o H_y \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c_{=y}\, n_{ex}^c \\ \frac{-c_{=y}}{n_{ord}^c} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H_{ord}^\uparrow \\ E_{ex}^\uparrow \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}_y \cdot \mathbf{F}^\uparrow$$

Hieraus ergibt sich

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{C}}_y \cdot \underline{\underline{C}}_x^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{(n_{ex}^c)^2}{q_{ex} - \frac{1}{c_{=y}} S_o\, P_{\Uparrow ex}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{q_{ord}} \end{pmatrix}$$

Eine TM-TE-Wandlung tritt in diesem Fall nicht auf. Dafür erkennen wir an dieser Matrix das Phänomen der Nicht-Reziprozität: Die Größe L_{tm}^{tm} hängt von $c_{=y}$ und damit von der Ausbreitungsrichtung ab. Diese Erscheinung wurde zuerst von Barber and Crombie (1959) beschrieben (siehe auch Wait, 1962; unser L_{tm}^{tm} ist identisch mit dem Kehrwert von Wait's Δ).



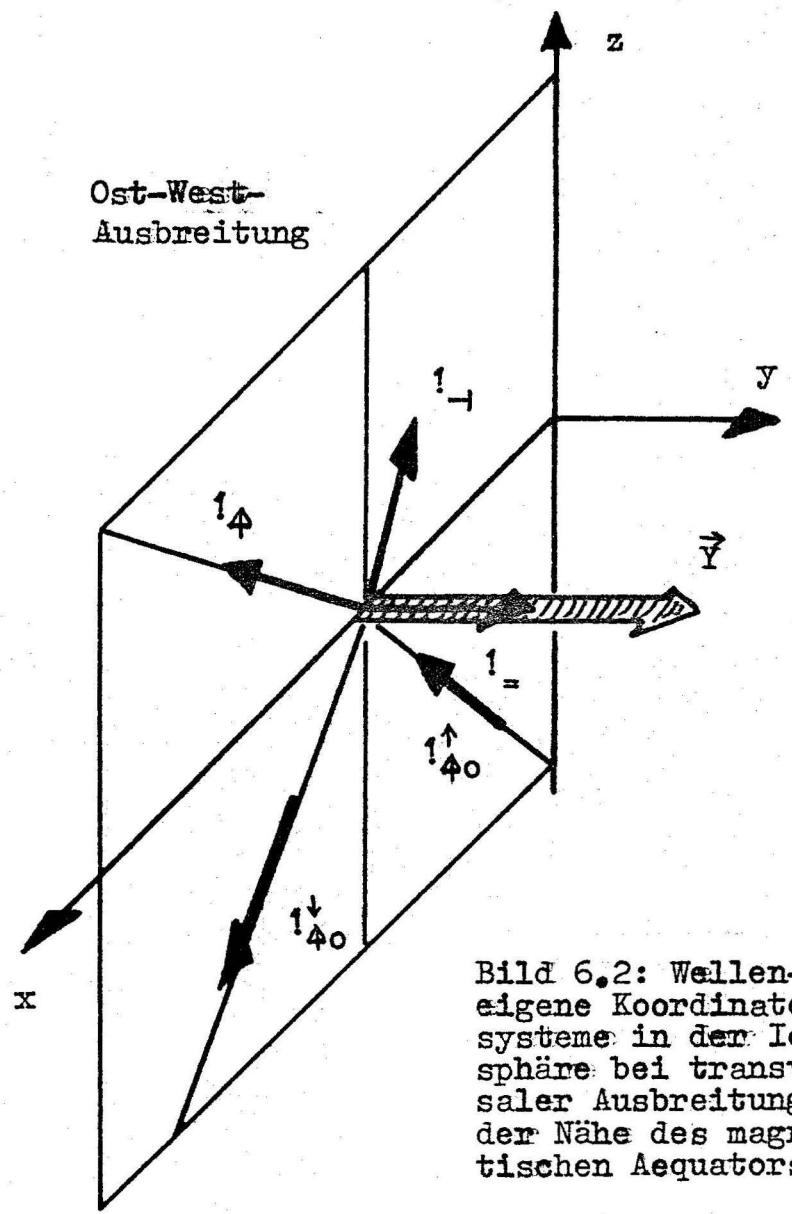


Bild 6.2: Wellen-eigene Koordinaten-systeme in der Iono-sphäre bei transver-saler Ausbreitung in der Nähe des magne-tischen Aequators

7. Reflexion an inhomogenen, anisotropen Ionosphärenmodellen

7.1 Das Differentialgleichungssystem für die horizontalen Vektorkoordinaten

7.1.1 Aufstellung

Wir setzen dieselbe physikalische Situation voraus wie in Kapitel 4 und erweitern die dort abgeleiteten Methoden dahingehend, daß wir die vom Erdmagnetfeld verursachte Anisotropie der Ionosphäre in die Betrachtung einbeziehen. Wir gehen also davon aus, daß a) die Höhenabhängigkeit der Elektronendichte und Stoßfrequenz durch stetige Funktionen angenähert werden kann, und

b) die Ausbreitung in der z,x-Ebene stattfindet, also von der Ortskoordinate y nicht abhängt: $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ für alle Vektorkoordinaten.

Weiterhin werden wir Lösungen suchen, die aus ebenen Wellen zusammengesetzt sind. Die Wellenvektoren dieser Wellen haben eine gemeinsame Koordinate k_x, die, vermöge des Brechungsgesetzes, durch den Neigungswinkel $\Theta_{\measuredangle o}$ der einfallenden Welle unterhalb der Ionosphäre vorgegeben ist ($S_o = \sin(\Theta_{\measuredangle o})$, $C_o = \cos(\Theta_{\measuredangle o})$):

$$k_x = k_o \sin(\Theta_{\measuredangle o}) = k_o S_o$$

sodaß der Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x}$ durch den Faktor $-jk_oS_o$ zu ersetzen ist.

Schließlich schreiben wir die in Abschn. 5.1.2 abgeleitete lineare Vektorbeziehung zwischen der Dielektrischen Verschiebung und der elektrischen Feldstärke in Koordinatenform:

$$\frac{1}{\epsilon_o}\mathbf{D} = \mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_o}\mathbf{P}_\epsilon = \begin{pmatrix} (1+M_{xx}) & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & (1+M_{yy}) & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & (1+M_{zz}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\epsilon_o}\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}$$

Dann gehen die Grundgleichungen ($\mu_r = 1$)

$$\mathrm{rot}(\vec{E}) = -jk_o\mu_r(Z_o\vec{H}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{rot}(Z_o\vec{H}) = jk_o(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_o}\vec{P}_\epsilon)$$

über in

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} + jk_oS_oE_z \\ -jk_oS_oE_y \end{pmatrix} = -jk_o\mu_r\begin{pmatrix} Z_oH_x \\ Z_oH_y \\ Z_oH_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{\partial(Z_oH_y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(Z_oH_x)}{\partial z} + jk_oS_o(Z_oH_z) \\ -jk_oS_o(Z_oH_y) \end{pmatrix} = \frac{jk_o}{\epsilon_o}\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = jk_o(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{M}}) \cdot \mathbf{E}$$

Hier läßt sich zwar, wie in 4.2.1, die Koordinate Z_oH_z durch $-E_y$ ausdrücken, nicht jedoch die Koordinate E_z durch Z_oH_y allein:

$$Z_oH_z = S_oE_y \quad , \quad E_z = -\frac{1}{1+M_{zz}}(S_o(Z_oH_y) + M_{zx}E_x + M_{zy}E_y)$$

(Die ausdrückliche Notierung von μ_r lassen wir in diesem Abschnitt fallen.)
Aus diesem Grunde ist es nicht mehr möglich, wie im isotropen Medium, zwei gleichartige, entkoppelte Differentialgleichungssysteme für die horizontalen Vektorkoordinaten der TM- und der TE-Welle aufzustellen.

Die Elimination der z-Koordinaten führt nach einigen Umformungen auf folgendes System

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_x \\ Z_oH_y \\ -E_y \end{pmatrix} = -jk_o \begin{pmatrix} \frac{-M_{zx}S_o}{1+M_{zz}} & 0 & \frac{1+M_{zz}-S_o^2}{1+M_{zz}} & \frac{M_{zy}S_o}{1+M_{zz}} \\ \left(\frac{M_{yz}M_{zx}}{1+M_{zz}} - M_{yx}\right) & 0 & \frac{M_{yz}S_o}{1+M_{zz}} & \left(1+M_{yy}-S_o^2-\frac{M_{yz}M_{zy}}{1+M_{zz}}\right) \\ \left((1+M_{xx}) - \frac{M_{xz}M_{zx}}{1+M_{zz}}\right) & 0 & \frac{-M_{xz}S_o}{1+M_{zz}} & \left(\frac{M_{xz}M_{zy}}{1+M_{zz}} - M_{xy}\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_x \\ Z_oH_y \\ -E_y \end{pmatrix}$$

Es ist lehrreich, diesem System das in 4.2.1 abgeleitete für isotropes Medium gegenüberzu stellen: ($\mu_r = 1$ gesetzt)

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_x \\ Z_oH_y \\ -E_y \end{pmatrix} = -jk_o \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\epsilon_r - S_o^2}{\epsilon_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\epsilon_r - S_o^2) \\ \epsilon_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_x \\ Z_oH_y \\ -E_y \end{pmatrix}$$

Man überzeugt sich dann leicht davon, daß bei Verschwinden des Magnetfeldes und damit aller Nicht-Diagonalglieder der Matrix $\underline{\underline{M}}$ die obere Form in die untere übergeht. Beiden Systemen gemeinsam ist die Form

$$\frac{d}{dz}\mathbf{F} = -jk_o\, \underline{\underline{\chi}} \cdot \mathbf{F}$$

wobei jetzt $\mathbf{F}$ eine Spalte mit vier Elementen, und $\underline{\underline{\chi}}$ eine Kopplungsmatrix mit 4 X 4 Elementen ist. Die Elemente der Kopplungsmatrix bezeichnen wir mit χ_{ij}, wobei i und j jetzt für ganzzahlige Indizes zwischen 1 und 4 stehen.

7.1.2 Formale Lösung im homogenen Medium mit 4 X 4-Transformationsmatrizen

Wie in Abschnitt 4.2.2 läßt sich im homogenen, anisotropen Medium eine Lösung des Differentialgleichungssystems dadurch finden, daß die Transformationsmatrix $\underline{\underline{C}}$ bestimmt wird, mit deren Hilfe die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\chi}}$ auf Hauptachsenform transformiert werden kann:

$$\mathbf{F} = \underline{\underline{C}} \cdot \mathbf{F}_{tr}\,, \quad \frac{d}{dz}\mathbf{F}_{tr} = \frac{d}{dz}(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \mathbf{F}) = -jk_o\, \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \mathbf{F}_{tr} = -jk_o\, \underline{\underline{Q}} \cdot \mathbf{F}_{tr}$$

Hierin soll die transformierte Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{Q}}$ nur noch in der Hauptdiagonalen von Null verschiedene Elemente haben:

$$\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{pmatrix}$$

Diese vier Elemente sind gleich den Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det(\underline{\underline{\chi}} - \underline{\underline{I}}^{(4)} q) = 0 \qquad (\underline{\underline{I}}^{(4)} = 4 \times 4 \text{ - Einheitsmatrix})$$

Aus physikalischen Gründen ist es einleuchtend, daß diese Lösungen identisch sind mit denen der Bestimmungsgleichung für q^c (Abschn. 5.3). Die umständlichen Umformungen, mit denen die Identität der soeben hingeschriebenen charakteristischen Gleichung und der in 5.3 behandelten Bestimmungsgleichung gezeigt werden kann, müssen - ihrer physikalischen Unergiebigkeit wegen - hier überschlagen werden. Wir ordnen die vier Lösungen der charakteristischen Gleichung den vier Lösungen der Bestimmungsgleichung in Abschn. 5.3 folgendermaßen zu:

$$q_1 = q_{ord}^{\uparrow}, \quad q_2 = q_{ex}^{\uparrow}, \quad q_3 = q_{ord}^{\downarrow}, \quad q_4 = q_{ex}^{\downarrow}$$

Die Elemente der transformierten Spalte $\mathbf{F}_{tr}$ interpretieren wir in enger Analogie zu den Überlegungen in Abschn. 4.2.2 . Die allgemeine Lösung unseres Differentialgleichungssystems stellt ein Feld dar, welches aus je einer auf- und absteigenden ordentlichen und außerordentlichen Welle zusammengesetzt ist. In Abschn. 5.2.4 begründeten wir die von uns getroffene Wahl der Darstellung

ordentlicher Wellen durch die H-Vektorkoordinate,

außerordentlicher Wellen durch die E-vektorkoordinate

senkrecht zu der vom Wellennormalvektor und dem Gyrofrequenzvektor aufgespannten Bezugsebene:

$$\begin{pmatrix} Z_oH_{ord}^{\uparrow} \\ E_{ex}^{\uparrow} \\ Z_oH_{ord}^{\downarrow} \\ E_{ex}^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_oH_{ordo}^{\uparrow}\exp(-jk_oq_{ord}^{\uparrow}z)\ \exp(j(\omega t - k_oS_ox)) \\ E_{exo}^{\uparrow}\ \exp(-jk_oq_{ex}^{\uparrow}\ z)\ \exp(j(\omega t - k_oS_ox)) \\ Z_oH_{ordo}^{\downarrow}\exp(-jk_oq_{ord}^{\downarrow}z)\ \exp(j(\omega t - k_oS_ox)) \\ E_{exo}^{\downarrow}\ \exp(-jk_oq_{ex}^{\downarrow}\ z)\ \exp(j(\omega t - k_oS_ox)) \end{pmatrix} = \mathbf{F}_{tr} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1o}\exp(-jk_oq_1z) \\ F_{2o}\exp(-jk_oq_2z) \\ F_{3o}\exp(-jk_oq_3z) \\ F_{4o}\exp(-jk_oq_4z) \end{pmatrix}$$

Hierin drücken wir $\mathbf{F}_{tr}$ wieder durch die Exponentialmatrix aus:

$$\mathbf{F}_{tr} = \begin{pmatrix} \exp(-jk_oq_1z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-jk_oq_2z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-jk_oq_3z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-jk_oq_4z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{1o} \\ F_{2o} \\ F_{3o} \\ F_{4o} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o\ \underline{\underline{Q}}\ z)\cdot \mathbf{F}_{tro}$$

Der Faktor $\exp(j(\omega t - k_oS_ox))$ soll in Zukunft auch dann nicht mitgeschrieben werden, wenn wir statt der numerischen Indizes die umständlicheren physikalischen Indizierungen verwenden, wodurch wir - trotz der erheblich größeren Schreibarbeit - zu einer physikalisch leichter durchschaubaren Darstellung gelangen.

Den Zusammenhang zwischen den Spalten $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_{tr}$ drücken wir durch eine 4 X 4 -Transformationsmatrix aus:

$$\mathbf{F} = \underline{\underline{C}}\cdot \mathbf{F}_{tr} = \begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_x \\ Z_oH_y \\ -E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_oH_{ord}^{\uparrow} \\ E_{ex}^{\uparrow} \\ Z_oH_{ord}^{\downarrow} \\ E_{ex}^{\downarrow} \end{pmatrix} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4)\cdot \mathbf{F}_{tr}$$

Hierin steht $\mathbf{c}_j$ für die aus den 4 Elementen c_{ij} (i = 1 .. 4) gebildete Spalte, die Matrix wird also gewissermaßen als Zeile aus 4 Spalten betrachtet.

Die Bestimmung der Elemente jeder Spalte verläuft ebenfalls analog zu 4.2.2 . Die transformierte Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz}\mathbf{F}_{tr} = -jk_o \underline{\underline{C}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\mathcal{X}}}\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\mathbf{F}_{tr} = -jk_o\,\underline{\underline{Q}}\cdot\mathbf{F}_{tr}$$

wird umgeformt in

$$(\underline{\underline{\mathcal{X}}}\cdot\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}\cdot\underline{\underline{Q}})\cdot\mathbf{F}_{tr} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{0} = \text{Spalte mit 4 Nullen})$$

ausgeschrieben:

$$\left(\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{11} & 0 & \mathcal{X}_{13} & \mathcal{X}_{14} \\ \mathcal{X}_{21} & 0 & \mathcal{X}_{23} & \mathcal{X}_{24} \\ \mathcal{X}_{31} & 0 & \mathcal{X}_{33} & \mathcal{X}_{34} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setzen wir hierin der Reihe nach

$$\mathbf{F}_{tr} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{tr} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{tr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{tr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

so erhalten wir für jede Spalte $\mathbf{c}_j$ ein homogenes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{X}_{11} - q_j) & 0 & \mathcal{X}_{13} & \mathcal{X}_{14} \\ \mathcal{X}_{21} & (-q_j) & \mathcal{X}_{23} & \mathcal{X}_{24} \\ \mathcal{X}_{31} & 0 & (\mathcal{X}_{33} - q_j) & \mathcal{X}_{34} \\ 0 & 1 & 0 & (-q_j) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ c_{3j} \\ c_{4j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\underline{\underline{\mathcal{X}}} - q_j\,\underline{\underline{I}})\cdot\mathbf{c}_j$$

aus dem sich die Verhältnisse c_{1j}/c_{4j} , c_{2j}/c_{4j} , c_{3j}/c_{4j} berechnen lassen. Hierin wird c_{4j} - ähnlich wie $c_y^{\uparrow}$ bzw. $c_y^{\downarrow}$ in Abschn. 4.2.2 , als allen c_{ij} gemeinsamer Faktor, der vom Gleichungssystem her unbestimmt bleibt, angesehen und dem - ebenfalls noch unbestimmten - Element F_j der Spalte $\mathbf{F}_{tr}$ hinzugeschlagen.

7.1.3 Physikalische Interpretation der Elemente der Transformationsmatrix durch die horizontalen Polarisationsverhältnisse der charakteristischen Wellen

Mit den Überlegungen dieses Abschnittes erweitern wir die des Abschnittes 6.2.3 . Während dort nur zwei aufsteigende Wellen betrachtet wurden, haben wir hier je zwei auf- und absteigende Wellen vor uns. Der Zusammenhang zwischen $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_{tr}$ lautet ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
E_x &= c_{11}(Z_oH_{ord}^{\uparrow}) + c_{12}\,E_{ex}^{\uparrow} + c_{13}(Z_oH_{ord}^{\downarrow}) + c_{14}\,E_{ex}^{\downarrow} \\
Z_oH_x &= c_{21}(Z_oH_{ord}^{\uparrow}) + c_{22}\,E_{ex}^{\uparrow} + c_{23}(Z_oH_{ord}^{\downarrow}) + c_{24}\,E_{ex}^{\downarrow} \\
Z_oH_y &= c_{31}(Z_oH_{ord}^{\uparrow}) + c_{32}\,E_{ex}^{\uparrow} + c_{33}(Z_oH_{ord}^{\downarrow}) + c_{34}\,E_{ex}^{\downarrow} \\
-E_y &= c_{41}(Z_oH_{ord}^{\uparrow}) + c_{42}\,E_{ex}^{\uparrow} + c_{43}(Z_oH_{ord}^{\downarrow}) + c_{44}\,E_{ex}^{\downarrow}
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die letzte Zeile der Bestimmungsgleichung für die c_{ij}

$$c_{2j} - q_j\, c_{4j} = 0 \quad , \text{folglich} \quad \underline{c_{2j}/c_{4j} = q_j}$$

Andererseits ist c_{2j}/c_{4j} nichts anderes als das Verhältnis $(Z_oH_x)/(-E_y)$ der j-ten charakteristischen Welle, was wir bereits in 6.2.3 festgestellt hatten.
In dem Verhältnis c_{1j}/c_{4j} erkennen wir das Verhältnis der Horizontal-Koordinaten des elektrischen Vektors, $E_x/(-E_y)$ für die j-te charakteristische Welle. Dieses Verhältnis bezeichnen wir als p_{Ej} .

Als horizontale H-Vektor-Polarisation bezeichnen wir das Verhältnis $(Z_oH_y)/(Z_oH_x)$ für die j-te charakteristische Welle. Diese läßt sich ausdrücken durch

$$\frac{c_{3j}}{c_{4j}} = \frac{c_{3j}}{c_{2j}}\,\frac{c_{2j}}{c_{4j}} = \frac{(Z_oH_y)_j}{(Z_oH_x)_j}\,\frac{(Z_oH_x)_j}{(-E_y)_j} = p_{Hj}\, q_j$$

Wenn wir schließlich die unbestimmte Größe c_{4j} gleich 1 setzen (besser ausgedrückt: wenn wir die Bestimmung von c_{4j} offenlassen, da wir ja noch die F_j nicht bestimmt haben), so nimmt die Transformationsmatrix $\underline{\underline{C}}$ folgende, sehr übersichtliche Gestalt an

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{E1} & p_{E2} & p_{E3} & p_{E4} \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ p_{H1}\, q_1 & p_{H2}\, q_2 & p_{H3}\, q_3 & p_{H4}\, q_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und wir erkennen, daß wir pro Lösung der charakteristischen Gleichung nicht mehr vier unbekannte c_{ij} bestimmen müssen, sondern nur noch deren zwei, nämlich p_{Ej} und p_{Hj} .

Die Bestimmungsgleichungen für diese zwei Unbekannten erhalten wir aus der ersten und der dritten Zeile des Gleichungssystems für $\mathbf{C}_j$ (mit $c_{1j}/c_{4j} = p_{Ej}$, $c_{3j}/c_{4j} = p_{Hj}\, q_j$)

$$(\chi_{11} - q_j)\, p_{Ej} + \chi_{13}\, p_{Hj}\, q_j + \chi_{14} = 0$$

$$\chi_{31}\, p_{Ej} + (\chi_{33} - q_j)\, p_{Hj}\, q_j + \chi_{34} = 0$$

Für j = 1 und 2 müssen die auf diese Weise berechneten p_{Ej} und p_{Hj} mit den Werten $p_{Eord,ex}$ und $p_{Hord,ex}$ des Abschnittes 6.2.3 übereinstimmen. Der direkte Nachweis erfordert sehr umfangreiche Umformungen, welche physikalisch nichts Neues bringen und daher nicht behandelt werden sollen.

7.1.4 Darstellung der Lösungen im homogenen Medium durch 2 X 2-Matrizen

Nun treiben wir die Analogie zu Abschnitt 4.2 noch weiter, indem wir , ähnlich wie in 6.1, die Spalten $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_{tr}$ in jeweils zwei Teilspalten zerlegen:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ Z_o H_x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Z_o H_y \\ -E_y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{tr} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_o H^{\uparrow}_{ord} \\ E^{\uparrow}_{ex} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Z_o H^{\downarrow}_{ord} \\ E^{\downarrow}_{ex} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\uparrow} \\ \mathbf{F}^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

In den Teilspalten $\mathbf{F}^{\uparrow}$ und $\mathbf{F}^{\downarrow}$ vereinigen wir ersichtlich die auf- bzw. absteigenden Wellen. Das drücken wir durch zwei 2 X 2-Exponentialmatrizen aus

$$\mathbf{F}^{\uparrow} = \begin{pmatrix} \exp(-jk_o q^{\uparrow}_{ord} z) & 0 \\ 0 & \exp(-jk_o q^{\uparrow}_{ex} z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\uparrow}_{ordo} \\ E^{\uparrow}_{exo} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o \underline{\underline{Q}}^{\uparrow} z) \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_o, \text{ wobei } \underline{\underline{Q}}^{\uparrow} = \begin{pmatrix} q^{\uparrow}_{ord} & 0 \\ 0 & q^{\uparrow}_{ex} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \exp(-jk_o q^{\downarrow}_{ord} z) & 0 \\ 0 & \exp(-jk_o q^{\downarrow}_{ex} z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\downarrow}_{ordo} \\ E^{\downarrow}_{exo} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o \underline{\underline{Q}}^{\downarrow} z) \cdot \mathbf{F}^{\downarrow}_o, \text{ wobei } \underline{\underline{Q}}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} q^{\downarrow}_{ord} & 0 \\ 0 & q^{\downarrow}_{ex} \end{pmatrix}$$

Entsprechend teilen wir die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\mathcal{K}}}$ und die Transformationsmatrix $\underline{\underline{C}}$ auf in je vier 2 X 2-Untermatrizen

$$\underline{\underline{\mathcal{K}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathcal{K}}}_{xx} & \underline{\underline{\mathcal{K}}}_{xy} \\ \underline{\underline{\mathcal{K}}}_{yx} & \underline{\underline{\mathcal{K}}}_{yy} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_x & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_x \\ \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_y & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_y \end{pmatrix}$$

wobei

$$\underline{\underline{\mathcal{K}}}_{xx} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{11} & 0 \\ \mathcal{K}_{21} & 0 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{\mathcal{K}}}_{xy} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{13} & \mathcal{K}_{14} \\ \mathcal{K}_{23} & \mathcal{K}_{24} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_x = \begin{pmatrix} p_{E1} & p_{E2} \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_x = \begin{pmatrix} p_{E3} & p_{E4} \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{K}}}_{yx} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{31} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{\mathcal{K}}}_{yy} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{33} & \mathcal{K}_{34} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_y = \begin{pmatrix} p_{H1} q_1 & p_{H2} q_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_y = \begin{pmatrix} p_{H3} q_3 & p_{H4} q_4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält unsere Lösung die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_x \cdot \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o \underline{\underline{Q}}^{\uparrow} z) \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_o + \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_x \cdot \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o \underline{\underline{Q}}^{\downarrow} z) \cdot \mathbf{F}^{\downarrow}_o \\ \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_y \cdot \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o \underline{\underline{Q}}^{\uparrow} z) \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_o + \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_y \cdot \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o \underline{\underline{Q}}^{\downarrow} z) \cdot \mathbf{F}^{\downarrow}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_x & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_x \\ \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_y & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\uparrow} \\ \mathbf{F}^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

Die Beziehungen dieser Matrizen zu den entsprechenden, skalaren Koeffizienten des Abschnittes 4.2 gehen aus unserer Nomenklatur klar hervor. Sie setzt uns instand, die Reflexionsfaktor-Berechnungen des Abschnittes 4.3 ohne erhebliche, formale Schwierigkeiten auf die Reflexion an anisotropen Ionosphärenmodellen zu übertragen.

7.2 L-Matrix und R-Matrix eines geschichteten Überganges

7.2.1 Berechnung als Produkt aus 4 X 4-Matrizen (Volland)

Wir knüpfen an die Schilderung der physikalischen Situation am Anfang von 4.3 an. Der Übergang zwischen dem Vakuum unterhalb der Ionosphäre (Index o) und einem nahezu homogenen Medium oberhalb z_M (Index M+1) wird durch eine Überlagerung von M homogenen Teilschichten angenähert. Die Laufnummer der Schichten ist m . Innerhalb der m-ten Schicht haben die Koeffizienten der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\chi}}$ einen höhenunabhängigen Wert. Hieraus folgen dann die Elemente der Transformationsmatrix $\underline{\underline{C}}_m$, mit deren Hilfe wir die Lösung des Differentialgleichungssystems innerhalb der m-ten Schicht folgendermaßen ansetzen können:

$$\mathbf{F}_m = \underline{\underline{C}}_m \cdot \mathbf{F}_{trm} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{xm} \\ \mathbf{F}_{ym} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{xm} & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{xm} \\ \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{ym} & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{ym} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\uparrow}_m \\ \mathbf{F}^{\downarrow}_m \end{pmatrix}$$

Hierin ist (in physikalischer Indizierung geschrieben)

$$\mathbf{F}^{\uparrow}_m = \begin{pmatrix} \exp(-jk_o q^{\uparrow}_{ord,m} z) & 0 \\ 0 & \exp(-jk_o q^{\uparrow}_{ex,m} z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\uparrow}_{ord,m,o} \\ E^{\uparrow}_{ex,m,o} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o \underline{\underline{Q}}^{\uparrow}_m z) \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_{m,o}$$

$$\mathbf{F}^{\downarrow}_m = \begin{pmatrix} \exp(-jk_o q^{\downarrow}_{ord,m} z) & 0 \\ 0 & \exp(-jk_o q^{\downarrow}_{ex,m} z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\downarrow}_{ord,m,o} \\ E^{\downarrow}_{ex,m,o} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o \underline{\underline{Q}}^{\downarrow}_m z) \cdot \mathbf{F}^{\downarrow}_{m,o}$$

Während die vier q-Werte aus den Elementen der Kopplungmatrix folgen (7.1.2), müssen die Elemente der Spalten $\mathbf{F}^{\uparrow}_{m,o}$ und $\mathbf{F}^{\downarrow}_{m,o}$ aus der Forderung nach der Stetigkeit der horizontalen Vektorkoordinaten an den Schichtgrenzen bestimmt werden. Diese Forderung aber ist identisch mit der nach Stetigkeit der Elemente der L-Matrix.

Die Reflexionsfaktor-Matrix ist dann gefunden, wenn die L-Matrix in der Höhe z_o berechnet werden kann. Dann ist unterhalb der Ionosphäre ($z < z_o$) ein aus TM- und TE-Welle gebildetes Wellenpaar anzusetzen

$$\mathbf{F}^{\uparrow}_o = \begin{pmatrix} \exp(-jk_o C_o z) & 0 \\ 0 & \exp(-jk_o C_o z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\uparrow}_{tm,o} \\ E^{\uparrow}_{te,o} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o C_o \underline{\underline{I}} z) \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_{o,o}$$

$$\mathbf{F}^{\downarrow}_o = \begin{pmatrix} \exp(+jk_o C_o z) & 0 \\ 0 & \exp(+jk_o C_o z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\downarrow}_{tm,o} \\ E^{\downarrow}_{te,o} \end{pmatrix} = \mathrm{Exp}(+jk_o C_o \underline{\underline{I}} z) \cdot \mathbf{F}^{\downarrow}_{o,o}$$

Setzen wir z_o der Bequemlichkeit halber gleich 0, so erhalten wir für die R- und L-Matrix in der Höhe z_o die Definition

$$\mathbf{F}_y(z=z_o) = \begin{pmatrix} Z_o H_y \\ -E_y \end{pmatrix}_{z_o} = \left(\begin{pmatrix} L^{tm}_{tm} & L^{tm}_{te} \\ L^{te}_{tm} & L^{te}_{te} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ Z_o H_x \end{pmatrix} \right)_{z_o} = \underline{\underline{L}}_o \cdot \mathbf{F}_x(z=z_o)$$

$$\mathbf{F}^{\downarrow}_o(z=z_o) = \mathbf{F}^{\downarrow}_{o,o} = \begin{pmatrix} Z_o H^{\downarrow}_{tm,o} \\ E^{\downarrow}_{te,o} \end{pmatrix}_{z_o} = \begin{pmatrix} R^{tm}_{tm} & R^{tm}_{te} \\ R^{te}_{tm} & R^{te}_{te} \end{pmatrix}_{z_o} \cdot \begin{pmatrix} Z_o H^{\uparrow}_{tm,o} \\ E^{\uparrow}_{te,o} \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}_o \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_{o,o}$$

Dann folgt aus der Umkehr des Zusammenhanges zwischen $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_{tr}$ unterhalb z_o (vgl. 6.1.1)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_o^{\uparrow} \\ \mathbf{F}_o^{\downarrow} \end{pmatrix}_{z_o} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_o^{\uparrow} \\ \underline{\underline{R}}_o \cdot \mathbf{F}_o^{\uparrow} \end{pmatrix}_{z_o} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_o} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} \\ \frac{-1}{C_o} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \underline{\underline{L}} \cdot \mathbf{F}_x \end{pmatrix}_{z_o}$$

die Reflexionsmatrix zu (Index o weggelassen)

$$\underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{L}}\, C_o - \underline{\underline{I}}) \cdot (\underline{\underline{L}}\, C_o + \underline{\underline{I}})^{-1}$$

Gegeben ist uns jedoch nicht $\underline{\underline{L}}$ in der Höhe z_o, sondern in der Höhe z_M, da wir oberhalb z_M nur je eine ordentliche und außerordentliche aufsteigende Welle haben. Dann können wir, auf die gleiche Art wie in 6.2.4, $\underline{\underline{L}}$ mit Hilfe der q-Werte und der horizontalen E- und H-Vektorpolarisationen für $z \geq z_M$ darstellen. Um die Schreibarbeit in erträglichen Grenzen zu halten, müssen wir von der physikalischen zur numerischen Indizierung übergehen:

$$q_{1,m} = q^{\uparrow}_{ord,m}, \quad q_{2,m} = q^{\uparrow}_{ex,m}, \quad q_{3,m} = q^{\downarrow}_{ord,m}, \quad q_{4,m} = q^{\downarrow}_{ex,m}$$

$$F_{1,m} = Z_o H^{\uparrow}_{ord,m}, \quad F_{2,m} = E^{\uparrow}_{ex,m}, \quad F_{3,m} = Z_o H^{\downarrow}_{ord,m}, \quad F_{4,m} = E^{\downarrow}_{ex,m}$$

$$p_{\substack{E1,m \\ H}} = p_{\substack{E \\ H}}^{\uparrow}{}_{ord,m}, \quad p_{\substack{E2,m \\ H}} = p_{\substack{E \\ H}}^{\uparrow}{}_{ex,m}, \quad p_{\substack{E3,m \\ H}} = p_{\substack{E \\ H}}^{\downarrow}{}_{ord,m}, \quad p_{\substack{E4,m \\ H}} = p_{\substack{E \\ H}}^{\downarrow}{}_{ex,m}$$

Damit wird die Transformationsmatrix in der m-ten Schicht:

$$\underline{\underline{C}}_m = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{E1,m} & p_{E2,m} \\ q_{1,m} & q_{2,m} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p_{E3,m} & p_{E4,m} \\ q_{3,m} & q_{4,m} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (p_{H1,m}\, q_{1,m}) & (p_{H2,m}\, q_{2,m}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (p_{H3,m}\, q_{3,m}) & (p_{H4,m}\, q_{4,m}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{xm} & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{xm} \\ \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{ym} & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{ym} \end{pmatrix}$$

Oberhalb z_M verschwinden die beiden aufsteigenden Wellen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{x,M+1} & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{x,M+1} \\ \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{y,M+1} & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{y,M+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\uparrow}_{M+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{x,M+1} \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_{M+1} \\ \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{y,M+1} \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \underline{\underline{L}}_M \cdot \mathbf{F}_x \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt die L-Matrix für Höhen $z \geq z_M$

$$\underline{\underline{L}}_M = \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{y,M+1} \cdot (\underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{x,M+1})^{-1}$$

Die Berechnung dieses Ausdruckes ergibt (siehe Abschn. 6.2.4)

$$\underline{\underline{L}}_M = \left(\frac{\begin{pmatrix} (p_{H1} - p_{H2})\, q_1\, q_2 & (p_{E1}\, p_{H2}\, q_2 - p_{E2}\, p_{H1}\, q_1) \\ (q_2 - q_1) & (p_{E1} - p_{E2}) \end{pmatrix}}{(p_{E1}\, q_2 - p_{E2}\, q_1)} \right)_{M+1}$$

Ist nun die L-matrix für die Obergrenze irgendeiner Teilschicht gegeben, so können wir sie für die Untergrenze der gleichen Teilschicht bestimmen. Die Dicke der m-ten Teilschicht bezeichnen wir mit Δz_m . Dann hängen die Elemente der transformierten Spalte $\mathbb{F}_{tr}$ unmittelbar unterhalb der Schichtobergrenze mit denen unmittelbar oberhalb der Schichtuntergrenze folgendermaßen zusammen:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}_{(z_{m-1}+0)} = \begin{pmatrix} \exp(+jk_o q_{1,m}\Delta z_m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(+jk_o q_{2,m}\Delta z_m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(+jk_o q_{3,m}\Delta z_m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(+jk_o q_{4,m}\Delta z_m) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}_{(z_m-0)}$$

$$\mathbb{F}_{tr}(z_{m-1}+0) = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+jk_o\,\underline{\underline{Q}}_m\,\Delta z_m)\cdot \mathbb{F}_{tr}(z_m-0)$$

Den Übergang zur Spalte $\mathbb{F}$ bewerkstelligen wir an beiden Grenzen mit der Transformationsmatrix

$$\mathbb{F}(z_{m-1}) = \underline{\underline{C}}_m\cdot \mathbb{F}_{tr}(z_{m-1}+0) \quad , \quad \mathbb{F}(z_m) = \underline{\underline{C}}_m\cdot \mathbb{F}_{tr}(z_m-0)$$

und gelangen damit zur <u>Übertragungsmatrix</u>, welche uns den Zusammenhang zwischen den Elementen der Spalte $\mathbb{F}$ an der Schichtobergrenze und denen an der Schichtuntergrenze liefert:

$$\underline{\mathbb{F}(z_{m-1}) = \underline{\underline{C}}_m\cdot\underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+jk_o\,\underline{\underline{Q}}_m\,\Delta z_m)\cdot\underline{\underline{C}}_m^{-1}\cdot \mathbb{F}(z_m) = \underline{\underline{T}}_m\cdot \mathbb{F}(z_m)}$$

in formal genauer Übereinstimmung mit 4.3.1 . Den Zusammenhang zwischen den Spalten $\mathbb{F}$ in der Höhe z_o und der Höhe z_M liefert uns nun das Matrizenprodukt aus den Übertragungsmatrizen allen Teilschichten:

$$\mathbb{F}(z_o) = \underline{\underline{T}}\cdot \mathbb{F}(z_M) = \underline{\underline{T}}_1\cdot\underline{\underline{T}}_2\cdot\underline{\underline{T}}_3\cdot \ldots \cdot\underline{\underline{T}}_m \ldots \cdot\underline{\underline{T}}_{M-1}\cdot\underline{\underline{T}}_M\cdot \mathbb{F}(z_M)$$

Diese Übertragungsmatrix hat 4 X 4 Elemente, welche wir zusammenfassen zu vier Untermatrizen zu je 2 X 2 Elementen. Diese bezeichnen wir in Analogie zu 4.3.1 folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{F}_x(z_o) \\ \mathbb{F}_y(z_o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{T}}_x^x & \underline{\underline{T}}_x^y \\ \underline{\underline{T}}_y^x & \underline{\underline{T}}_y^y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{F}_x(z_M) \\ \mathbb{F}_y(z_M) \end{pmatrix}$$

Mit $\mathbb{F}_y(z_o) = \underline{\underline{L}}_o\cdot \mathbb{F}_x(z_o)$ und $\mathbb{F}_y(z_M) = \underline{\underline{L}}_M\cdot \mathbb{F}_x(z_M)$ erhalten wir für den Zusammenhang zwischen $\underline{\underline{L}}_o$ und $\underline{\underline{L}}_M$:

$$\underline{\underline{L}}_o = (\underline{\underline{T}}_y^x + \underline{\underline{T}}_y^y\cdot\underline{\underline{L}}_M)\cdot(\underline{\underline{T}}_x^x + \underline{\underline{T}}_x^y\cdot\underline{\underline{L}}_M)^{-1}$$

Diese Berechnungsmethode für den Reflexionsfaktor stammt von Volland (1963a, 1968)

7.2.2 Berechnung mit 2 X 2-Matrizen (Wait)

So elegant die im vorigen Abschnitt aufgezeigte Lösung formal hinzuschreiben ist, - sie hat den rechentechnischen Nachteil, daß für jede Schicht eine 4 X 4-Matrix invertiert werden muß. Dies wird vermieden durch eine Formulierung, in der nur 2 X 2-Matrizen auftreten. Diese Formulierung geht durch fast wörtliche Übertragung aus der in 4.3.2 geschilderten Methode in Matrizenschreibweise hervor. Unsere Darstellung ist - trotz unübersehbarer Unterschiede in der Nomenklatur - an eine Beschreibung von Wait (1968) angelehnt.

Wir gehen wieder davon aus, daß die L-Matrix oberhalb z_M gegeben ist durch

$$\underline{\underline{L}}_M = \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{y,M+1} \cdot (\underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{x,M+1})^{-1}$$

Innerhalb der m-ten Schicht setzen wir die Lösung des Differentialgleichungssystems an in der Form

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{xm} & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{xm} \\ \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{ym} & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{ym} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\uparrow}_m \\ \mathbf{F}^{\downarrow}_m \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}_m \cdot \mathbf{F}_{trm}$$

An dem Schichtgrenzen z_m verhalten sich die Elemente von $\mathbf{F}$ stetig, die von $\underline{\underline{C}}_m$ und von $\mathbf{F}_{trm}$ ändern sich unstetig. - Kennen wir nun die L-Matrix an der Obergrenze der m-ten Schicht - also in der Höhe z_m :

$$\underline{\underline{L}}(z_m) = \underline{\underline{L}}_m \quad , \quad \mathbf{F}_y(z_m) = \underline{\underline{L}}_m \cdot \mathbf{F}_x(z_m)$$

so kann man hieraus die L-Matrix für die Untergrenze der gleichen Schicht bestimmen. Hierzu bestimmen wir zuerst die Matrix $\underline{\underline{R}}$ unmittelbar unterhalb z_m:

$$\underline{\underline{R}}(z_m - 0) = \underline{\underline{R}}_m \quad , \quad \mathbf{F}^{\downarrow}(z_m - 0) = \mathbf{F}^{\downarrow}_m(z_m) = \underline{\underline{R}}_m \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}(z_m - 0) = \underline{\underline{R}}_m \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_m(z_m)$$

folgendermaßen:

$$\mathbf{F}_x(z_m) = \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{xm} \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_m(z_m) + \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{xm} \cdot \mathbf{F}^{\downarrow}_m(z_m) = (\underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{xm} + \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{xm} \cdot \underline{\underline{R}}_m) \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_m(z_m)$$

$$\mathbf{F}_y(z_m) = \underline{\underline{L}}_m \cdot \mathbf{F}_x(z_m) = \underline{\underline{L}}_m \cdot (\underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{xm} + \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{xm} \cdot \underline{\underline{R}}_m) \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_m(z_m) = (\underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{ym} + \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{ym} \cdot \underline{\underline{R}}_m) \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_m(z_m)$$

Hieraus durch Auflösung nach $\underline{\underline{R}}_m$:

$$\underline{\underline{R}}_m = (\underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{ym} - \underline{\underline{L}}_m \cdot \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_{xm})^{-1} \cdot (\underline{\underline{L}}_m \cdot \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{xm} - \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_{ym})$$

Die Höhenabhängigkeit der transformierten Spalte erfassen wir durch die Exponentialmatrix:

$$\mathbf{F}^{\uparrow}_m(z) = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o \, \underline{\underline{Q}}^{\uparrow}_m \, z) \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_{m,o} \quad , \quad \mathbf{F}^{\downarrow}_m(z) = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o \, \underline{\underline{Q}}^{\downarrow}_m \, z) \cdot \mathbf{F}^{\downarrow}_{m,o}$$

Hiermit und mit der leicht nachprüfbaren, allgemeinen Beziehung

$$(\underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(\underline{\underline{\emptyset}}))^{-1} = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-\underline{\underline{\emptyset}})$$

können wir den Zusammenhang zwischen den Elementen der transformierten Spalte $\mathbf{F}_{tr}$ an der Ober- und Untergrenze darstellen:

$$\mathbf{F}^{\uparrow}(z_{m-1} + 0) = \mathbf{F}^{\uparrow}_m(z_{m-1}) = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+jk_o \, \underline{\underline{Q}}^{\uparrow}_m \, \Delta z_m) \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_m(z_m)$$

$$\mathbf{F}^{\downarrow}(z_{m-1} + 0) = \mathbf{F}^{\downarrow}_m(z_{m-1}) = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+jk_o \, \underline{\underline{Q}}^{\downarrow}_m \, \Delta z_m) \cdot \mathbf{F}^{\downarrow}_m(z_m) = \underline{\underline{R}}(z_{m-1} + 0) \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}_m(z_{m-1})$$

Hierin steht $\underline{\underline{R}}(z_{m-1} + 0)$ für die Reflexionsmatrix unmittelbar oberhalb der Schichtuntergrenze. Ihren Zusammenhang mit der Reflexionsmatrix $\underline{\underline{R}}_m = \underline{\underline{R}}(z_m - 0)$ unmittelbar unterhalb der Schichtobergrenze finden wir folgendermaßen:

$$\underline{\underline{R}}(z_{m-1} + 0)\cdot\underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+jk_o\,\underline{\underline{Q}}_m^{\uparrow}\,\Delta z_m)\cdot \mathbb{F}_m^{\uparrow}(z_m) = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+jk_o\,\underline{\underline{Q}}_m^{\downarrow}\,\Delta z_m)\cdot\underline{\underline{R}}_m\cdot \mathbb{F}_m^{\uparrow}(z_m)$$

$$\underline{\underline{R}}(z_{m-1} + 0) = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+jk_o\,\underline{\underline{Q}}_m^{\downarrow}\,\Delta z_m)\cdot\underline{\underline{R}}_m\cdot\underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-jk_o\,\underline{\underline{Q}}_m^{\uparrow}\,\Delta z_m)$$

Hieraus folgt nun wieder die L-matrix an der Schichtuntergrenze:

$$\underline{\underline{L}}(z_{m-1}) = \underline{\underline{L}}_{m-1} = (\underline{\underline{C}}_{ym}^{\uparrow} + \underline{\underline{C}}_{ym}^{\downarrow}\cdot\underline{\underline{R}}(z_{m-1} + 0))\cdot(\underline{\underline{C}}_{xm}^{\uparrow} + \underline{\underline{C}}_{xm}^{\downarrow}\cdot\underline{\underline{R}}(z_{m-1} + 0))^{-1}$$

An der Schichtuntergrenze gehen die Elemente der Transformationsmatrix $\underline{\underline{C}}_m$ unstetig über in die der Matrix $\underline{\underline{C}}_{m-1}$. Die Elemente der Reflexionsmatrix ändern sich ebenfalls unstetig, die der L-Matrix jedoch stetig. Daher können wir aus $\underline{\underline{L}}_{m-1}$ wiederum die R-matrix unmittelbar unterhalb der Schichtuntergrenze berechnen:

$$\underline{\underline{R}}(z_{m-1} - 0) = \underline{\underline{R}}_{m-1} = (\underline{\underline{C}}_{y,m-1} - \underline{\underline{L}}_{m-1}\cdot\underline{\underline{C}}_{x,m-1})^{-1}\cdot(\underline{\underline{L}}_{m-1}\cdot\underline{\underline{C}}_{x,m-1} - \underline{\underline{C}}_{y,m-1})$$

Hieraus läßt sich wieder $\underline{\underline{R}}$ für die Untergrenze der (m-1)-ten Schicht berechnen, also für die Höhe z_{m-2}, hieraus weiter $\underline{\underline{L}}$ für die gleiche Höhe, hieraus wieder $\underline{\underline{R}}$ unmittelbar unterhalb z_{m-2} usf. . Durch Wiederholung des Verfahrens gelangt man schießlich zur gesuchten L-Matrix in der Höhe z_o und damit zur Reflexionsmatrix an der Ionosphärenuntergrenze.

Abschließend drücken wir noch die Zusammenhänge zwischen den horizontalen Vektorkoordinaten an der oberen und der unteren Grenze der m-ten Schicht mit Hilfe von 2 X 2-Übertragungsmatrizen aus:

$$\underline{\mathbb{F}_x(z_{m-1}) = \underline{\underline{T}}_{xm}\cdot \mathbb{F}_x(z_m)\ ,\quad \mathbb{F}_y(z_{m-1}) = \underline{\underline{T}}_{ym}\cdot \mathbb{F}_y(z_m)}$$

Darin setzen wir

$$\mathbb{F}_x(z_{m-1}) = (\underline{\underline{C}}_{xm}^{\uparrow} + \underline{\underline{C}}_{xm}^{\downarrow}\cdot\underline{\underline{R}}(z_{m-1} + 0))\cdot \mathbb{F}_m^{\uparrow}(z_{m-1})\ ,\quad \mathbb{F}_x(z_m) = (\underline{\underline{C}}_{xm}^{\uparrow} + \underline{\underline{C}}_{xm}^{\downarrow}\cdot\underline{\underline{R}}_m)\cdot \mathbb{F}_m^{\uparrow}(z_m)$$

$$\mathbb{F}_y(z_{m-1}) = (\underline{\underline{C}}_{ym}^{\uparrow} + \underline{\underline{C}}_{ym}^{\downarrow}\cdot\underline{\underline{R}}(z_{m-1} + 0))\cdot \mathbb{F}_m^{\uparrow}(z_{m-1})\ ,\quad \mathbb{F}_y(z_m) = (\underline{\underline{C}}_{ym}^{\uparrow} + \underline{\underline{C}}_{ym}^{\downarrow}\cdot\underline{\underline{R}}_m)\cdot \mathbb{F}_m^{\uparrow}(z_m)$$

$$\underline{\underline{R}}(z_{m-1} + 0) = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+j\underline{\underline{\delta}}_m^{\downarrow})\cdot\underline{\underline{R}}_m\cdot\underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(-j\underline{\underline{\delta}}_m^{\uparrow})\ ,\quad \underline{\underline{\delta}}_m^{\uparrow} = k_o\,\underline{\underline{Q}}_m^{\uparrow}\,\Delta z_m\ ,\quad \underline{\underline{\delta}}_m^{\downarrow} = k_o\,\underline{\underline{Q}}_m^{\downarrow}\,\Delta z_m$$

$$\mathbb{F}_m^{\uparrow}(z_{m-1}) = \underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+j\underline{\underline{\delta}}_m^{\uparrow})\cdot \mathbb{F}_m^{\uparrow}(z_m)$$

und erhalten

$$\underline{\underline{T}}_{xm} = (\underline{\underline{C}}_{xm}^{\uparrow}\cdot\underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+j\underline{\underline{\delta}}_m^{\uparrow}) + \underline{\underline{C}}_{xm}^{\downarrow}\cdot\underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+j\underline{\underline{\delta}}_m^{\downarrow})\cdot\underline{\underline{R}}_m)\cdot(\underline{\underline{C}}_{xm}^{\uparrow} + \underline{\underline{C}}_{xm}^{\downarrow}\cdot\underline{\underline{R}}_m)^{-1}$$

$$\underline{\underline{T}}_{ym} = (\underline{\underline{C}}_{ym}^{\uparrow}\cdot\underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+j\underline{\underline{\delta}}_m^{\uparrow}) + \underline{\underline{C}}_{ym}^{\downarrow}\cdot\underline{\underline{\mathrm{Exp}}}(+j\underline{\underline{\delta}}_m^{\downarrow})\cdot\underline{\underline{R}}_m)\cdot(\underline{\underline{C}}_{ym}^{\uparrow} + \underline{\underline{C}}_{ym}^{\downarrow}\cdot\underline{\underline{R}}_m)^{-1}$$

7.2.3 Die Differentialgleichung der L-Matrix (Budden)

Abschließend leiten wir die Differentialgleichung der L-Matrix ab, welche für numerische Berechnungen gut geeignet ist, falls ein Rechenzentrum mit entsprechend ausgestatteter Programmbibliothek zur Verfügung steht. Voraussetzung ist, wie bisher, daß oberhalb von z_M ein nahezu homogenes Ausbreitungsmedium angenommen werden darf, sodaß dort ein Anfangswert für die Elemente der L-Matrix, $\underline{\underline{L}}_M$, bekannt ist. Wir schreiben die Differentialgleichung für $\mathbf{F}$ in der in 7.1.4 eingeführten Form

$$\frac{d}{dz}\mathbf{F} = -jk_o\,\underline{\underline{\chi}}\cdot\mathbf{F} = \frac{d}{dz}\begin{pmatrix}\mathbf{F}_x\\ \mathbf{F}_y\end{pmatrix} = -jk_o\begin{pmatrix}\underline{\underline{\chi}}_{xx} & \underline{\underline{\chi}}_{xy}\\ \underline{\underline{\chi}}_{yx} & \underline{\underline{\chi}}_{yy}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{F}_x\\ \mathbf{F}_y\end{pmatrix}$$

und setzen darin ein

$$\mathbf{F}_y = \underline{\underline{L}}\cdot\mathbf{F}_x \;,\quad \frac{d}{dz}\mathbf{F}_y = \left(\frac{d}{dz}\underline{\underline{L}}\right)\cdot\mathbf{F}_x + \underline{\underline{L}}\cdot\left(\frac{d}{dz}\mathbf{F}_x\right)$$

Daraus folgt eine Differentialgleichung für die L-Matrix

$$\left(\frac{d}{dz}\underline{\underline{L}}\right)\cdot\mathbf{F}_x = \frac{d}{dz}\mathbf{F}_y - \underline{\underline{L}}\cdot\left(\frac{d}{dz}\mathbf{F}_x\right) = -jk_o\left(\left(\underline{\underline{\chi}}_{yx} + \underline{\underline{\chi}}_{yy}\cdot\underline{\underline{L}}\right)\cdot\mathbf{F}_x - \underline{\underline{L}}\cdot\left(\underline{\underline{\chi}}_{xx} + \underline{\underline{\chi}}_{xy}\cdot\underline{\underline{L}}\right)\cdot\mathbf{F}_x\right)$$

$$\underline{\underline{\frac{d}{dz}\underline{\underline{L}} = jk_o\left(\underline{\underline{L}}\cdot\underline{\underline{\chi}}_{xy}\cdot\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}\cdot\underline{\underline{\chi}}_{xx} - \underline{\underline{\chi}}_{yy}\cdot\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{\chi}}_{yx}\right)}}$$

In entsprechender Form wurde die Differentialgleichung einer sehr ähnlichen Matrix, der "Admittanzmatrix", von Budden (1961a) angegeben. Ausführliche Angaben zur Programmierung der numerischen Integration wurden von Ries (1964) und Stratmann (1970) veröffentlicht.

7.3 Beispiele

Abschließend soll ein erster, orientierender Überblick über die Einflüsse des Erdmagnetfeldes, der Stoßfrequenz- und Elektronendichte-Profile sowie der Frequenz auf den ionosphärischen Reflexionsfaktor anhand ausgewählter Beispiele vermittelt werden. Dem hierzu verwendeten Rechenprogramm liegt die in Abschn. 7.2.2 geschilderte Methode zugrunde. Zur Berechnung der hierin verwendeten Matrizen $\underline{\underline{C}}_x^{\uparrow}$, $\underline{\underline{C}}_x^{\downarrow}$, $\underline{\underline{C}}_y^{\uparrow}$ und $\underline{\underline{C}}_y^{\downarrow}$ diente das in 7.1 beschriebene Verfahren. Jedoch wurde zu Testzwecken auch die in 6.2 beschriebene Methode der welleneigenen Koordinatensysteme für einfache Ionosphärenmodelle mit bis zu zwei übereinandergelagerten, homogenen Schichten angewendet. Es ergab sich volle Übereinstimmung mit den Ergebnissen der erstgenannten Methode, jedoch ein um den Faktor 1,5 größerer Bedarf an Rechenzeit. Darum wurde das Verfahren des Abschn. 7.1 vorgezogen, obwohl hierbei gewisse Vorsichtsmaßnahmen zu beachten sind (z.B.: Vermeidung des singulären Falles der Ost-West-Ausbreitung unter dem magnetischen Aequator, s. Abschn. 6.3.2).

Folgende Auswahlmöglichkeiten für die modellmäßige Darstellung der tiefen Ionosphäre wurden bei den Programmierarbeiten vorgesehen:

A) Physikalische Modelle: Das Stoßzahlprofil wird durch eine mit der Höhe abfallende Exponentialfunktion mit den Parametern ν_{c70} und $H_{s\nu}$ (vgl. Abschn. 4.1.4) dargestellt. Für das Elektronendichte-Profil wurden vorgesehen

1. Chapman-Rekombinationsschicht mit höhenunabhängigem Rekombinationskoeffizienten,
2. Chapman-Anlagerungsschicht mit höhenunabhängigem Anlagerungskoeffizienten (vgl. Abschn. 4.1.2)
3. Exponential-Modelle nach Wait und Walters (vgl. 4.1.3).

Jedes Modell wird durch drei Parameter erfaßt, eine charakteristische Elektronendichte N_m (bzw. N_{ref}), eine charakterische Höhe z_m (bzw. z_{ref}), und eine Skalenhöhe H_s (bzw. H_{ref}). Außerdem lassen sich bis zu drei derartige Schichten in beliebiger Kombination überlagern.

B) Überlagerung homogener Schichten: Wegen des großen Rechenzeitbedarfes für die physikalischen Schichtmodelle ist es von praktischer Bedeutung, für Testzwecke und orientierende Rechnungen mit einfacheren Modellen arbeiten zu können. Daher wurde die Möglichkeit vorgesehen, den Profilverlauf durch eine sehr grobe Stufenfunktion mit bis zu drei Stufen beliebig wählbarer Höhe anzunähern.

Weiterhin wurde dafür gesorgt, daß die Berechnungen auch mit "abgeschaltetem" Magnetfeld wiederholt werden können, um so Vergleiche mit früheren, einfacheren Rechnungen an isotropen Ionosphärenmodellen durchführen zu können (Frisius, 1974).

In jedem Fall ergeben sich als "reflection coefficient matrix" vier komplexe Funktionen des cosinus C_o des Einfallswinkels, also acht Kurvenbilder, je eines für Betrag und für die Phase. Die Bildtafel I zeigt ein Beispiel für die halbgraphische Ausgabe dieser Kurven durch das Rechenprogramm. Durch die Gegenüberstellung einer Berechnung mit und ohne Magnetfeld (obere und untere Kurvenschar) erkennen wir den starken Einfluß der Anisotropie auf die Kurvenformen für R_{tm}^{tm} und R_{te}^{te}. Dieser Einfluß hängt jedoch seinerseits erheblich vom geomagnetischen Ort und von der Ausbreitungsrichtung ab. Über diese Abhängigkeit orientiert die Bildtafel II. Hier - wie auch in den folgenden Bildtafeln - wurde ein Überblick durch Neben- bzw. Übereinander-Kopieren der vom Computer ausgedruckten, halbgraphischen Kurvenbilder hergestellt. Dementsprechend darf die Genauigkeit dieser Darstellungen im einzelnen nicht überbewertet werden. Sie reicht jedoch für die summarischen Überblicke, um die es in dieser Darstellung vor allem geht, völlig aus.

In Bildtafel II, sowie in den folgenden Tafeln III bis VI, VIII und IX, finden wir in der rechten Bildhälte Betragskurven, in der linken Phasenkurven, in der obersten Reihe für R_{tm}^{tm}, in der mittleren für R_{te}^{tm}, und in der untersten für R_{te}^{te}. Das Matrixelement R_{tm}^{te} konnte aus Platzgründen in diesen Darstellungen nicht mit untergebracht werden, unterscheidet sich jedoch in den meisten Fällen dem Kurventyp nach nicht erheblich von R_{te}^{tm}.

Der Tafel II liegt ein homogenes, anisotropes Ionosphärenmodell entsprechend Kap. 6 zugrunde (die Daten sind im Bild angegeben). Variiert wurden die geomagnetische Breite φ_{mag} und die Ausbreitungsrichtung Ψ_a. (Für $\varphi_{mag} = 0$ müssen statt $\Psi_a = 90^\circ$ und 270° geringfügig geänderte Werte eingesetzt werden, z. B. $90{,}1^\circ$ und $270{,}1^\circ$, wenn nach Abschn. 7.1 gerechnet wird!) Man erkennt, daß das Magnetfeld vor allem eine starke Richtungsabhängigkeit des Elementes R_{tm}^{tm} bewirkt, besonders nahe dem magnetischen Aequator. Jedoch auch in höheren magnetischen Breiten darf man die Richtungsabhängigkeit des Reflexionsfaktors nicht einfach vernachlässigen. Am magnetischen Aequatpr entspricht der Reflexionsfaktor R_{tm}^{tm} für $\Psi_a = 180^\circ$ dem isotropen Reflexionsfaktor R_{tm}. In höheren Breiten jedoch ist es nicht möglich, R_{tm}^{tm} für Nord-Süd-Ausbreitung einfach durch "Abschalten" des Magnetfeldes zu berechnen.

Für den Übergang von der magnetischen Nordhalbkugel zur Südhalbkugel bzw. von der Ausbreitung in den nördlichen Halbraum zur Ausbreitung in den südlichen Halbraum gelten folgende Regeln:

$$R_{tm}^{tm}(\varphi_{magn}, \Psi_a) = R_{tm}^{tm}(\varphi_{magn}, (\pi - \Psi_a)) = R_{tm}^{tm}(-\varphi_{magn}, \Psi_a)$$

$$R_{te}^{tm}(\varphi_{magn}, \Psi_a) = R_{tm}^{te}(\varphi_{magn}, (\pi - \Psi_a)) = -R_{tm}^{te}(-\varphi_{magn}, \Psi_a)$$

$$R_{tm}^{te}(\varphi_{magn}, \Psi_a) = R_{te}^{tm}(\varphi_{magn}, (\pi - \Psi_a)) = -R_{te}^{tm}(-\varphi_{magn}, \Psi_a)$$

$$R_{te}^{te}(\varphi_{magn}, \Psi_a) = R_{te}^{te}(\varphi_{magn}, (\pi - \Psi_a)) = R_{te}^{te}(-\varphi_{magn}, \Psi_a)$$

Somit genügt die Berechnung für einen Halbraum und für eine Halbkugel, um die gesamte Abhängigkeit von der Ausbreitungsrichtung und der geomagnetischen Breite zu überblicken. Für einen ersten Überblick genügt sogar die Berechnung der Extremfälle

Ausbreitung am magnetischen Nordpol: $\varphi_{magn} = 90^\circ$, $\underline{\underline{R}}$ ist dann richtungsunabhängig,
und Ausbreitung am magnetischen Aequator: $\varphi_{magn} = 0^\circ$, zur groben Erfassung der Richtungsabhängigkeit von R_{tm}^{tm} genügt die Berechnung für $\Psi_a = 90^\circ$, 180° und 270°.

Diese Auswahl der Richtungs- und Breitenwerte wurde für Bildtafel III getroffen, um den Einfluß von Änderungen der Elektronendichte und der Stoßfrequenz eines homogenen, anisotropen Ionosphärenmodells zu zeigen. Die hier angegebenen Modelldaten wurden - ebenso wie für Bildtafel II - einer früheren Arbeit von Field und Tamarkin (1961) entnommen, mit deren Ergebnissen unsere Modellrechnungen in befriedigendem Maße übereinstimmen.

Bei den in Bildtafel IV und V dargestellten Rechnungen wurde der homogenen Modellionosphäre von Tafel II eine dicke, homogene Schicht mit höherer Absorption vorgelagert. Bildtafel IV zeigt zunächst in der gleichen Anordnung wie II die Abhängigkeit der Reflexionsfaktorkurven vom geomagnetischen Ort und der Ausbreitungsrichtung. Man erkennt, daß die absorbierende Schicht die Tendenz hat, den Reflexionsfaktor insgesamt zu verkleinern und die Unterschiede zwischen West-Ost- und Ost-West-Ausbreitung nahe dem magnetischen Aequator auszugleichen. In Bildtafel V wurde für einen West-Ost-Ausbreitungsweg in der Nordhalbkugen ($\varphi_{magn} = 60^\circ$, $\Psi_a = 93^\circ$) die Dicke der vorgelagerten Schicht variiert. Auf diese Weise läßt sich die Auswirkung einer "Zweischicht-Reflexion" veranschaulichen. Sie kann dazu führen, daß auch der Reflexionsfaktor-Betrag $|R_{te}^{te}|$ Minima aufweist, die auf den ersten Blick wie Brewster-Minima aussehen. Sie beruhen jedoch auf Interferenzen zwi- Teilwellen, die an der oberen und an der unteren Trennebene partiell reflektiert werden. Die Verzerrungen der Phasenkurven lassen sich dahingehend deuten, daß die Reflexionshöhe stark vom Einfallswinkel abhängig wird (vgl.hierzu Volland (1968, pg. 68 ff), und Stratmann, (1970, pg. 28 ff)). Deutlich sieht man, wie mit zunehmender Schichtdicke der Reflexionsfaktor zuerst für streifenden Einfall (C_o nahe 0), dann auch für steileren Einfall sich allmählich den Kurvenverläufen für unendlich dicke, untere Schicht annähert.

Mit Bildtafel VI gehen wir zu Modellen mit stetigen Stoßfrequenz- und Elektronendichteprofilen über. Hier wurde zunächst in der gleichen Art wie in den Tafeln II und IV die Ortsabhängigkeit des Reflexionsfaktors für ein Modell mit exponentiell anwachsender Elektronendichte (vgl. Abschn. 4.1.3) gezeigt. Dieses Modell wird seit den ersten Veröffentlichungen durch Wait und Walters (1963) gern zur Erklärung der Tagesausbreitung benutzt.

(Für Wait und Walter's Parameter ß ist in unserer Schreibweise zu setzen $\beta = \frac{1}{H_{ref}} + \frac{1}{H_{s\nu}}$.) Offenbar folgt die Ortsabhängigkeit auch hier ähnlichen Prinzipien wie in den Tafeln II und IV. Eine einfache analytische Formulierung hierfür kann jedoch zur Zeit noch nicht angegeben werden.

Bildtafel VII zeigt die halbgraphische Darstellung eines Ionosphärenmodells, das aus zwei übereinandergelagerten Chapmanschichten zusammengesetzt ist. Mit derartigen Ausdrucken quittiert das Computer-Programm das Einlesen der Modelldaten, die im Bildkopf angegeben sind. Die Ausgabe des Plots wird verbunden mit einer Berechnung der Integrationsgrenzen (z_{lim} für die unteren, z_{top} für die obere), sowie der Referenzhöhe z_{ref}, auf die sich die Angaben der Reflexionsfaktor-Phasen beziehen. Die Wahl der Referenzhöhe wurde, entsprechend dem Vorgehen von Wait und Walters (1963) und von Harth (1970) so getroffen, daß dort die "Leitfähigkeitsfrequenz" $f_{cond} = \frac{1}{2\pi\nu_c} \cdot \omega_N^2$ den Wert 40 kHz hat. Entsprechend werden z_{lim} und z_{top} durch f_{cond}-Werte definiert, die ebenfalls der Bildtafel VII entnommen werden können: Der Ausdruck der "charakteristischen Höhen" für das Modell ist (aus Platzgründen um 90° gedreht) an der linken Seite der Bildtafel wiedergegeben.

Zu erwarten ist, daß sich die verschiedenen Höhenabhängigkeiten der Modellprofile für Stoßfrequenz und Elektronendichte in verschiedenen Frequenzabhängigkeiten der Reflexionsfaktorkurven wiederspiegeln (siehe hierzu Frisius (1974)). Der Erfassung dieser Frequenzabhängigkeiten gelten die zur Zeit laufenden Rechenarbeiten, deren Zeitbedarf auch durch einen so leistungsstarken Rechner wie am Großrechenzentrum für die Wissenschaft in Berlin nicht von heute auf morgen befriedigt werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit können nur zwei Beispiele gegeben werden, die für einen West-Ost-Ausbreitungsweg auf der Nordhalbkugel für die Frequenzen 2, 4, 8 und 16 kHz berechnet wurden, siehe Bildtafeln VIII und IX. Hier wurden jeweils zwei Ionosphärenmodelle mit etwa gleicher Referenzhöhe, jedoch stark unterschiedlichen Elektronendichte-Profilen zugrundegelegt. Derartige Rechnungen bilden die Grundlage für den Versuch, aus 16 kHz- Routineregistrierungen auf die Ausbreitungsparameter von VLF-Atmospherics in Frequenzbereich unterhalb 10 kHz zu schließen. In Bildtafel VIII finden wir zwei Tagmodelle, einmal das gleiche Exponentialfunktions-Modell wie in Bildtafel VI (Index Exp), zum andern das in Tafel VII dargestellte Modell mit zwei Chapmanschichten (Index 2Ch). Bildtafel IX vereinigt Berechnungen für zwei Nachtmodelle: ein Exponentialmodell mit den Parametern $z_{ref} = 90$ km und $\beta = {}^1/H_{ref} + {}^1/H_{s\nu} = 0.5\ km^{-1}$, und ein Chapmanschichtmodell mit höhenunabhängigem Rekombinationskoeffizienten und den Parametern $N_m = 3000\ cm^{-3}$, $z_m = 105$ km, $H_s = 6{,}5$ km. Die Bilder lassen eine Zunahme sowohl der Reflexions- als auch der Konversionsfaktor-Beträge beim Übergang von Tag- zu Nachtausbreitungsbedingungen erkennen. Damit lassen sich u. a. die starken, nur während der Nacht zu beobachtenden Schwankungen des Peilwinkels und der Elliptizität des magnetischen Vektors erklären (Frisius, Heydt und Raupach, 1971). Auffällig ist, daß die Chapmanschicht-Modelle durchweg zu größeren Konversionsfaktoren führen als die Exponentialmodelle. Offensichtlich spielt hier eine Rolle, daß die Elektronendichte der Chapmanschichtmodelle nach niedrigen Höhen hin weit schneller abnimmt als bei Exponentialmodellen mit vergleichbarer Referenzhöhe. Eine eingehendere Diskussion dieser Kurvenbilder innerhalb des oben angedeuteten Zusammenhanges muß einem gesonderten technischen Bericht vorbehalten bleiben.

Legenden für die Bildtafeln:

I : Computer-Ausdruck des Reflexionsfaktors eines anisotropen und eines isotropen Zwei-Schicht-Modells

II : Orts- und Richtungsabhängigkeit des Reflexionsfaktors einer homogenen, anisotropen Modell-Ionosphäre.

III : Einfluß der Elektronendichte und Stoßfrequenz auf den Reflexionsfaktor einer homogenen, anisotropen Modell-Ionosphäre, - Spalte 1: Magnetischer Pol, Spalte 2: Magnetischer Aequator, Ost-West-Ausbreitung, Spalte 3: Magnetischer Aequator, Nord-Süd-Ausbreitung, Spalte 4: Magnetischer Aequator, West-Ost-Ausbreitung

IV : Orts- und Richtungsabhängigkeit des Reflexionsfaktors eines anisotropen Zwei-Schicht-Modells

V : Reflexionsfaktor eines Zweischichtmodells mit variabler Dicke der Zwischenschicht ($\varphi_{magn} = 60°$, $\Psi_a = 93°$, $\Delta z = 0, 2, 4, \ldots, 16$ km)

VI : Orts- und Richtungsabhängigkeit des Reflexionsfaktors eines anisotropen Ionosphärenmodells mit exponentiell anwachsender Elektronendichte

VII : Computer-Ausdruck eines Ionosphärenmodells aus zwei Chapman-Rekombinations-Schichten, links (um 90° gedreht): Ausdruck der Referenzhöhe und der Integrationsgrenzen

VIII : Vergleich zwischen den Reflexionsfaktoren für das Modell von Bildtafel VI (Index Exp) und Bildtafel VII (Index 2Ch) für vier Frequenzen und einen West-Ost-Ausbreitungsweg auf der Nordhalbkugel ($\varphi_{magn} = 54°$, $\Psi_a = 100°$)

IX : Vergleich der Reflexionsfaktoren für ein Modell mit exponentiell anwachsender Elektronendichte ($z_{ref} = 90$ km, $\beta = 0.5$ km^{-1}) und für eine Chapman-Rekombinationsschicht ($N_m = 3000$ cm^{-3}, zm = 105 km, $H_s = 6{,}5$ km), Ausbreitungsweg wie in VIII.

I

IONOSPHERIC REFLECTION COEFFICIENT MATRIX

MODEL.. 2 HOMOGENEOUS LAYER(S)
LAYER 2.. ELECDENS = 350.0/C**3, BOUND.HEIGHT = 85.0 KM, COLLFREQ = 1.0*10** 6/SEC
LAYER 1.. ELECDENS = 150.0/C**3, BOUND.HEIGHT = 83.0 KM, COLLFREQ = 1.0*10** 7/SEC

GEOMAG. LAT. = 60.00 DEG., PROP. AZIMUTH = 93.00 DEG., GYROMAG.FREQ.VECTOR = (21.90, -419.42, 1454.92) KHZ

FREQUENCY = 16.00 KHZ

COSTHO	RFTM (*)	RFTE (=)	0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0	PHTMTM (DEG.)	PHTMTE (DEG.)	-180 -90 0 90 180
0.10	0.8478	0.0895		179.7	154.5	
0.20	0.7241	0.1567		179.3	146.4	
0.30	0.6225	0.2084		178.9	137.7	
0.40	0.5389	0.2489		178.7	128.6	
0.50	0.4696	0.2807		179.7	118.9	
0.60	0.4125	0.3060		179.8	109.7	
0.70	0.3646	0.3257		178.7	98.0	
0.80	0.3225	0.3403		178.3	86.6	
0.90	0.2839	0.3402		177.5	74.6	
1.00	0.2352	0.3538		-176.0	64.9	

COSTHO	RFTM (-)	RFTE (+)	0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0	PHTMTM (DEG.)	PHTMTE (DEG.)	-180 -90 0 90 180
0.10	0.8913	0.8716		155.8	165.6	
0.20	0.1598	0.7638		147.7	150.8	
0.30	0.2124	0.6710		139.1	135.8	
0.40	0.2535	0.5892		129.8	120.3	
0.50	0.2858	0.5158		121.1	104.4	
0.60	0.3113	0.4489		100.8	87.9	
0.70	0.3339	0.3869		99.0	70.5	
0.80	0.3457	0.3296		87.5	52.0	
0.90	0.3529	0.2724		75.4	31.9	
1.00	0.3544	0.2133		65.4	9.2	

IONOSPHERIC REFLECTION COEFFICIENT MATRIX

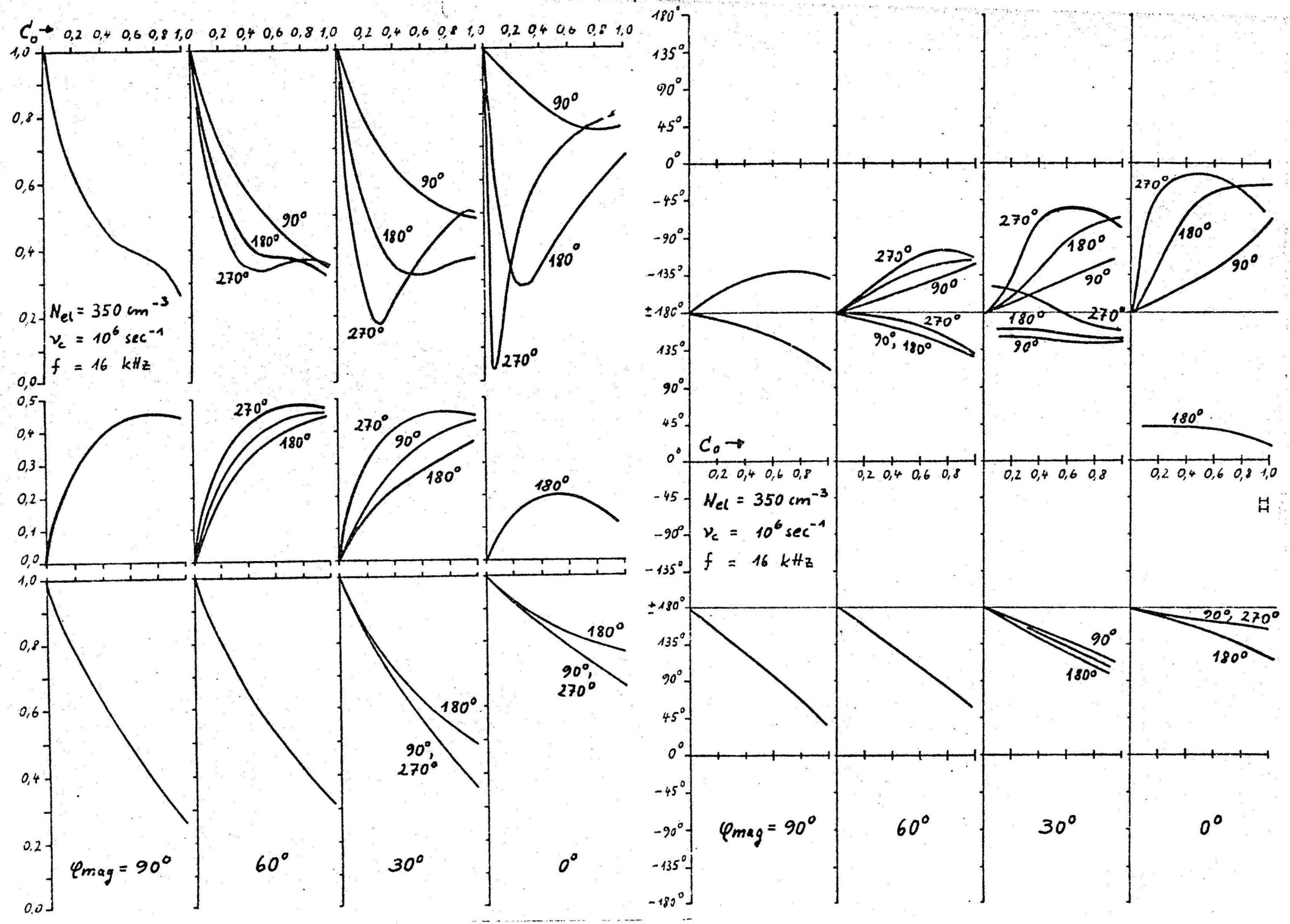
MODEL.. 2 HOMOGENEOUS LAYER(S)
LAYER 2.. ELECDENS = 350.0/C**3, BOUND.HEIGHT = 85.0 KM, COLLFREQ = 1.0*10** 6/SEC
LAYER 1.. ELECDENS = 150.0/C**3, BOUND.HEIGHT = 83.0 KM, COLLFREQ = 1.0*10** 7/SEC

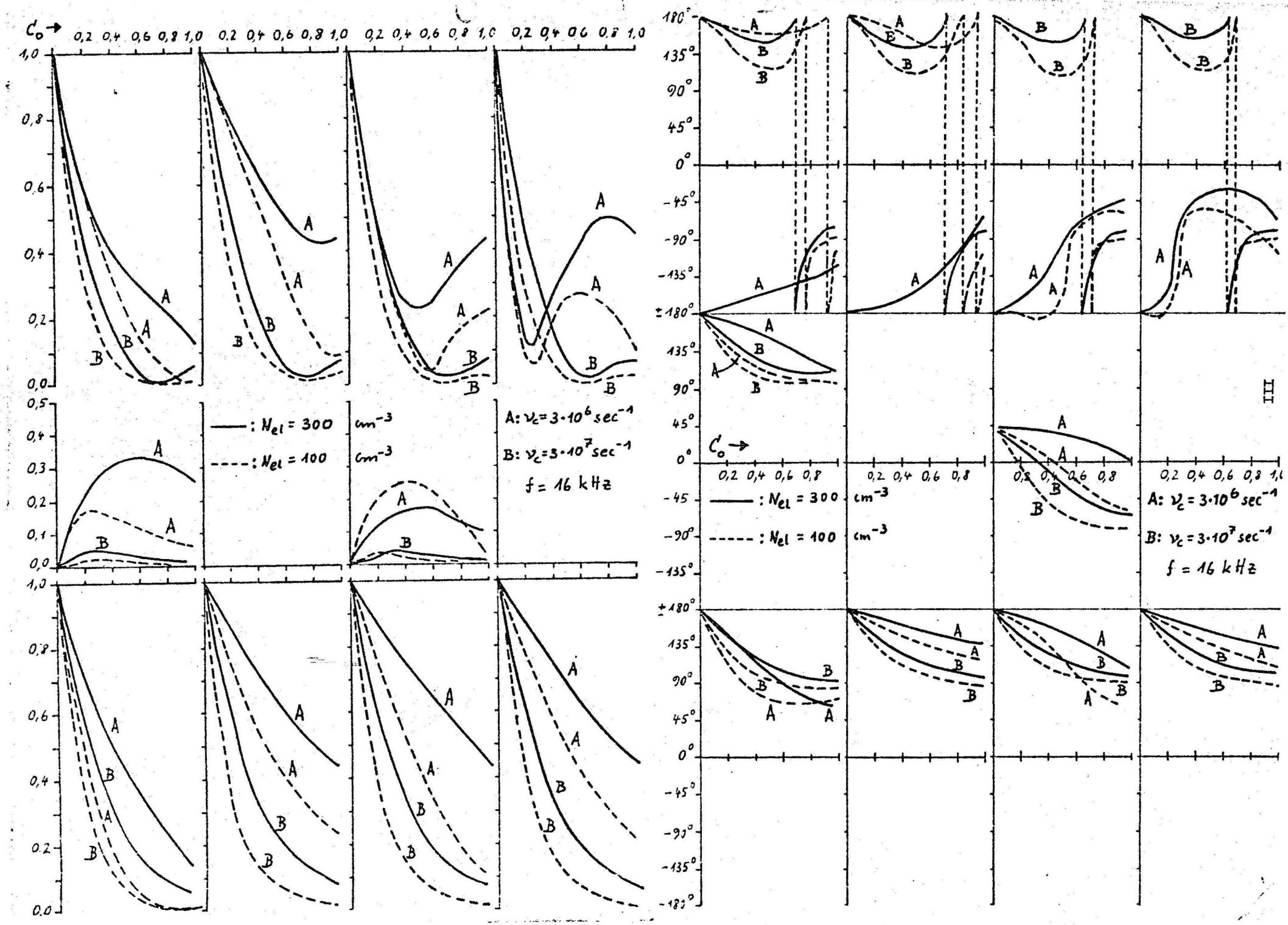
GEOMAG. LAT. = 60.00 DEG., PROP. AZIMUTH = 93.00 DEG., GYROMAG.FREQ.VECTOR = (0.0 , 0.0 , 0.0) KHZ

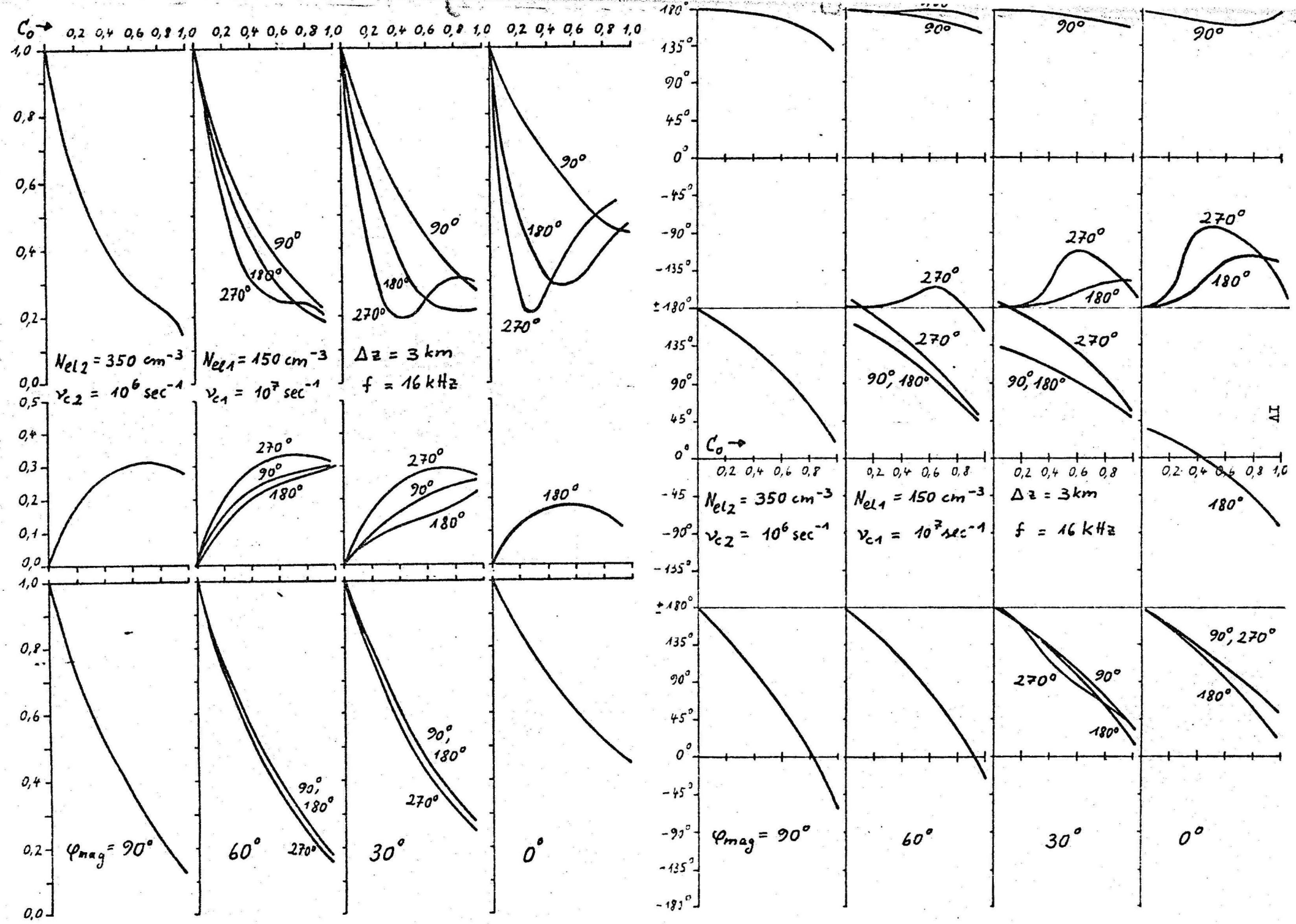
FREQUENCY = 16.00 KHZ

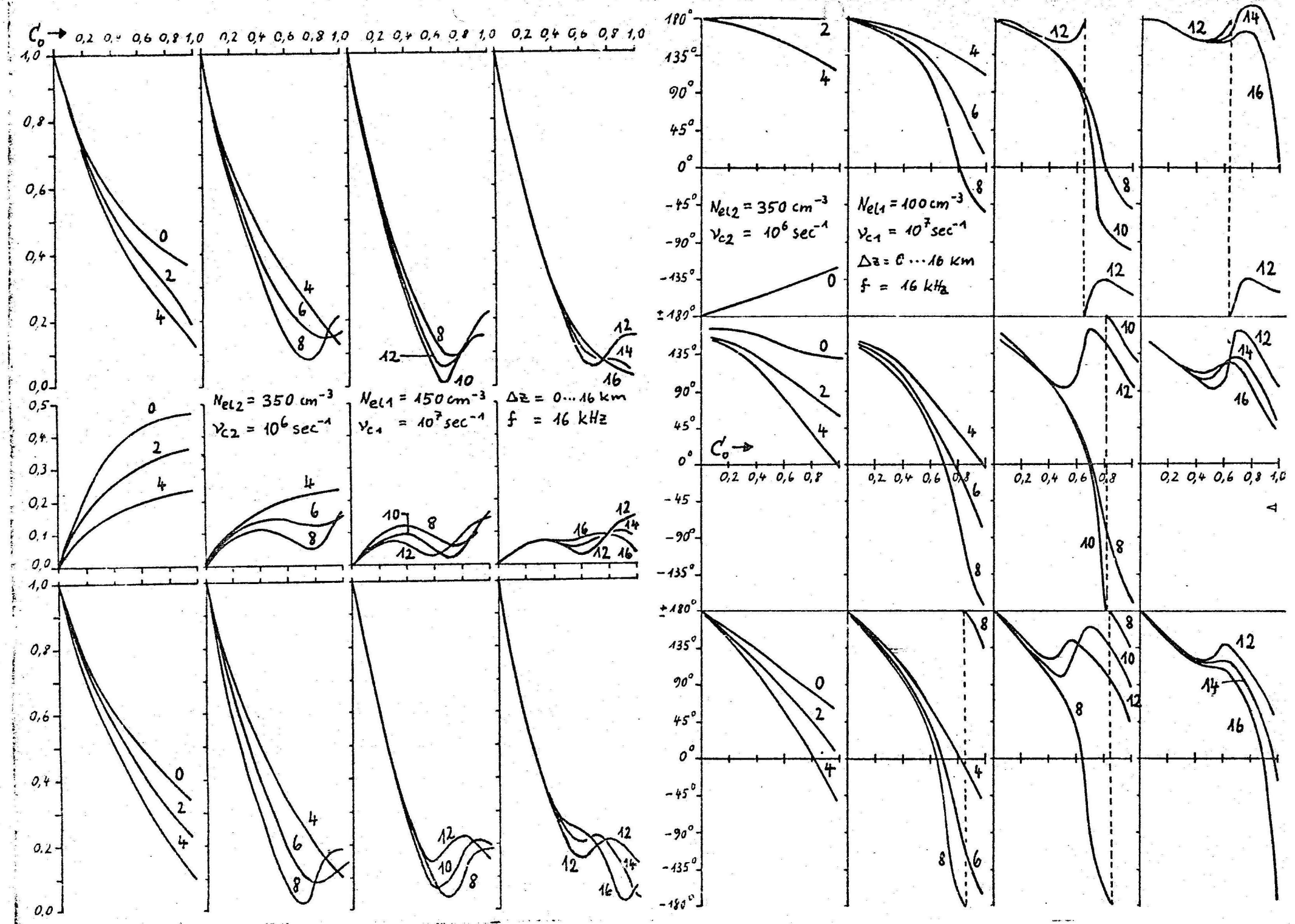
COSTHO	RFTM (*)	RFTE (=)	0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0	PHTMTM (DEG.)	PHTMTE (DEG.)	-180 -90 0 90 180
0.10	0.7282	0.0		-173.3	180.0	
0.20	0.5333	0.0		-164.7	180.0	
0.30	0.4128	0.0		-152.1	180.0	
0.40	0.3340	0.0		-134.9	180.0	
0.50	0.3227	0.0		-117.0	180.0	
0.60	0.3519	0.0		-103.6	180.0	
0.70	0.4113	0.0		-96.1	180.0	
0.80	0.4575	0.0		-93.0	180.0	
0.90	0.5138	0.0		-92.9	180.0	
1.00	0.5669	0.0		-94.7	180.0	

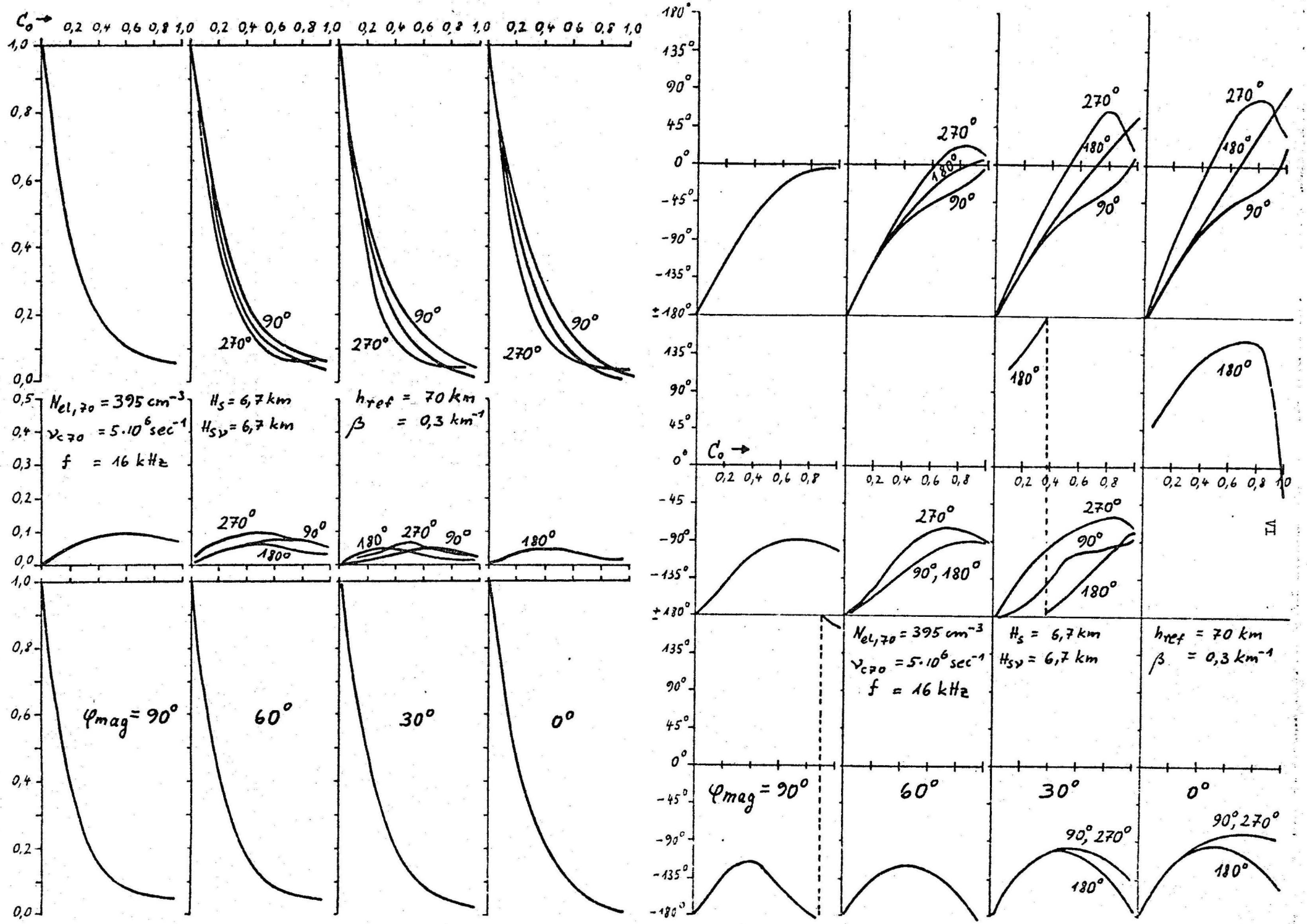
COSTHO	RFTM (-)	RFTE (+)	0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0	PHTMTM (DEG.)	PHTMTE (DEG.)	-180 -90 0 90 180
0.10	0.0	0.9450		180.0	170.7	
0.20	0.0	0.8930		180.0	161.3	
0.30	0.0	0.8439		180.0	152.0	
0.40	0.0	0.7974		180.0	142.6	
0.50	0.0	0.7534		180.0	133.2	
0.60	0.0	0.7118		180.0	123.7	
0.70	0.0	0.6724		180.0	114.2	
0.80	0.0	0.6353		180.0	104.6	
0.90	0.0	0.6001		180.0	95.0	
1.00	0.0	0.5669		180.0	95.3	


$C_0 \rightarrow$
$N_{el} = 350\ cm^{-3}$
$\nu_c = 10^6\ sec^{-1}$
$f = 16\ kHz$
$\varphi_{mag} = 90°$
60°
30°
0°
90°
180°
270°
90°, 180°
90°, 270°
II


$C_o \rightarrow$
0,2 0,4 0,6 0,8 1,0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
A
B
——— : N_{el} = 300 cm^{-3}
- - - - : N_{el} = 100 cm^{-3}
A: $\nu_c = 3 \cdot 10^6$ sec^{-1}
B: $\nu_c = 3 \cdot 10^7$ sec^{-1}
f = 16 kHz
180°
135°
90°
45°
0°
-45°
-90°
-135°
±180°


$C_0 \rightarrow$
$N_{el2} = 350\ cm^{-3}$
$\nu_{c2} = 10^6\ sec^{-1}$
$N_{el1} = 150\ cm^{-3}$
$\nu_{c1} = 10^7\ sec^{-1}$
$\Delta z = 3\ km$
$f = 16\ kHz$
$\varphi_{mag} = 90°$
60°
30°
0°
90°
180°
270°
90°, 180°
90°, 270°
ΔI

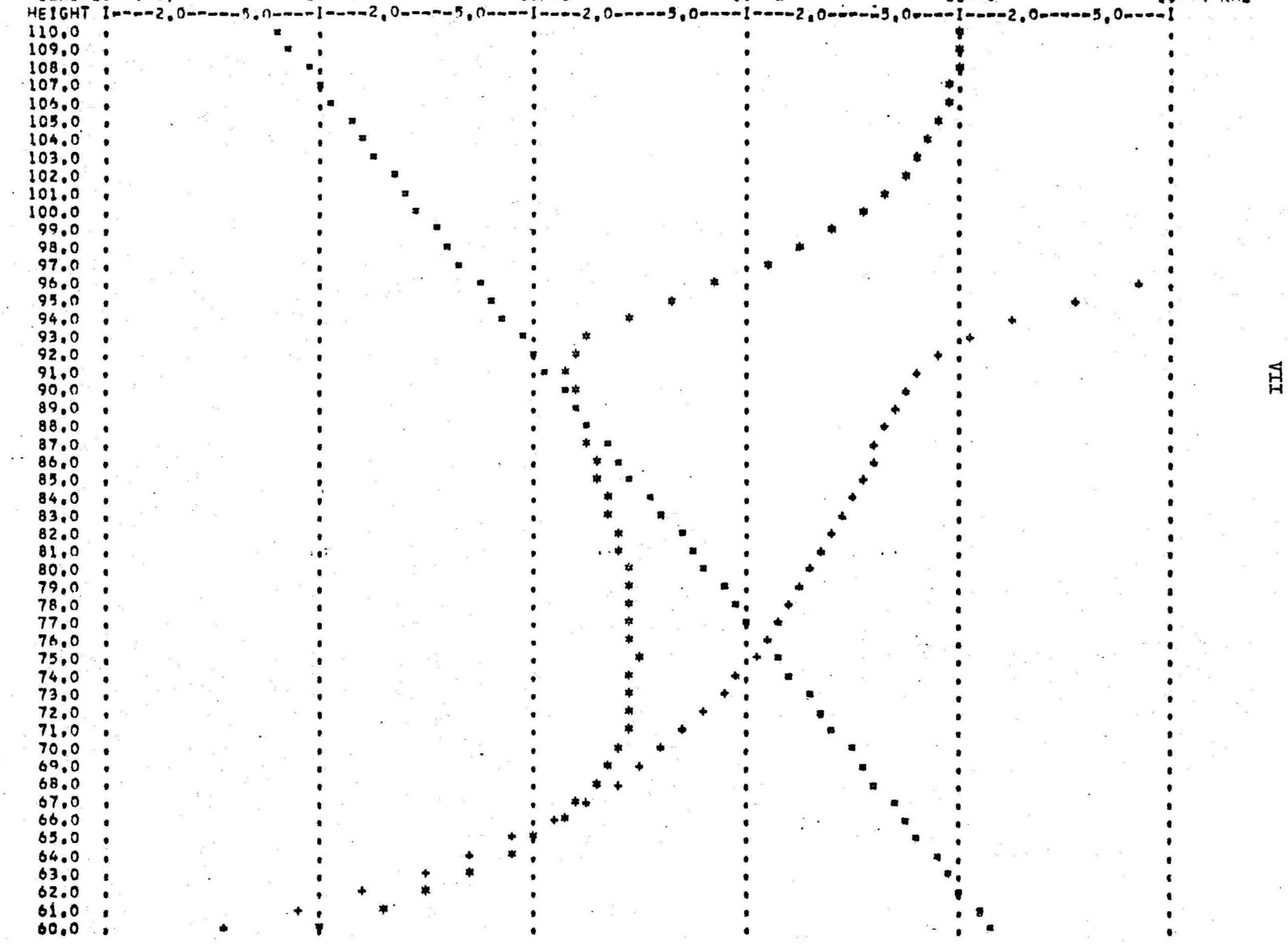

C_0 →
$N_{el2} = 350\ cm^{-3}$
$\nu_{c2} = 10^6\ sec^{-1}$
$N_{el1} = 150\ cm^{-3}$
$\nu_{c1} = 10^7\ sec^{-1}$
$\Delta z = 0 \dots 16\ km$
$f = 16\ kHz$
$N_{el2} = 350\ cm^{-3}$
$\nu_{c2} = 10^6\ sec^{-1}$
$N_{el1} = 100\ cm^{-3}$
$\nu_{c1} = 10^7\ sec^{-1}$
$\Delta z = 0 \dots 16\ km$
$f = 16\ kHz$
C_0 →


C_0 →
$N_{el,70} = 395\ cm^{-3}$
$\nu_{c70} = 5 \cdot 10^6\ sec^{-1}$
$f = 16\ kHz$
$H_s = 6{,}7\ km$
$H_{s\nu} = 6{,}7\ km$
$h_{ref} = 70\ km$
$\beta = 0{,}3\ km^{-1}$
$\varphi_{mag} = 90°$
60°
30°
0°
90°
270°
180°
90°, 180°
90°, 270°

VI

HEIGHT DEPENDENCE OF COLLISION FREQUENCY, ELECTRON DENSITY AND CONDUCTIVITY FREQUENCY
MODEL..COLLISION FREQUENCY PROFILE.. NYC70 = 0.300E+07/SEC, HSNY = 6.5 KM
ELECTRON DENSITY PROFILE..
LAYER 1 TYPE 2 (RECOMBINATION), NL = 10000.00/CM**3, ZM = 110.0 KM, HS = 6.5 KM
LAYER 2 TYPE 2 (RECOMBINATION), NL = 300.00/CM**3, ZM = 75.0 KM, HS = 6.5 KM

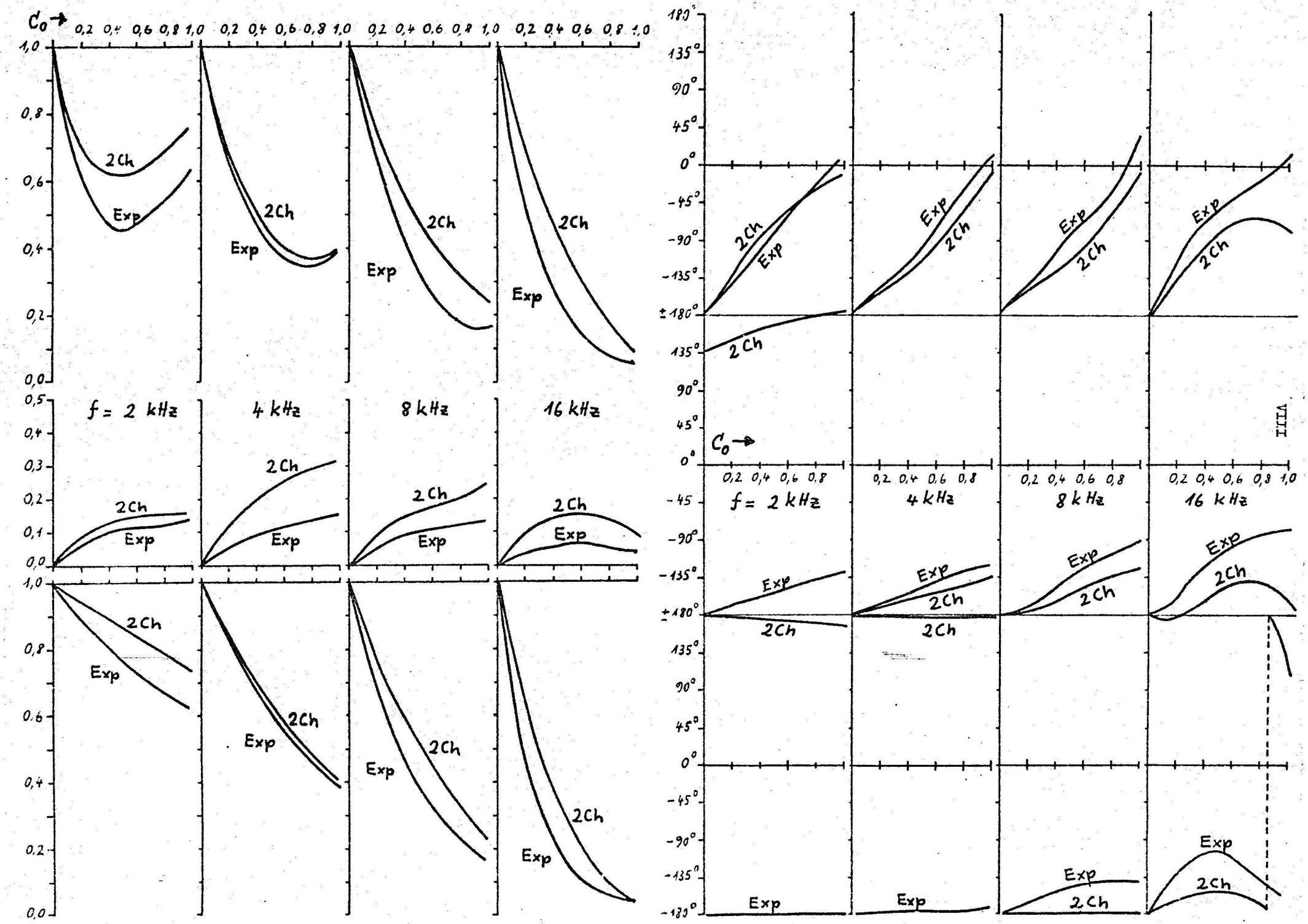
SYMBOLS..ELECTRONDENSITY NEL (*), COLLISION FREQUENCY NCOLL (=), CONDUCTIVITY FREQUENCY FCOND (+).

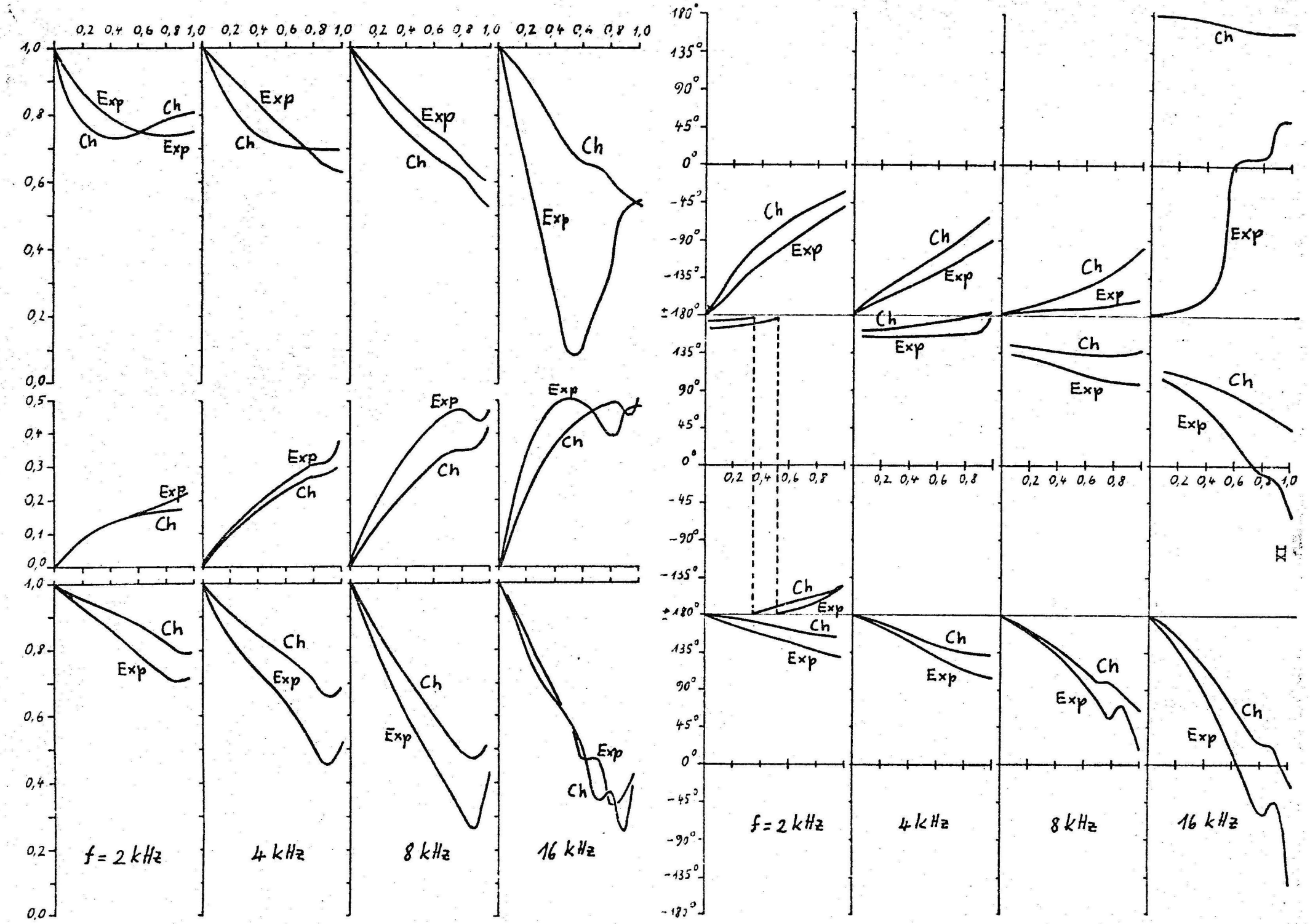


CHARACTERISTIC HEIGHTS ZLIM (FCOND = 0.050 KHZ) = 57.959 KM
ZREF (FCOND = 40.000 KHZ) = 69.831 KM
ZTOP (FCOND = 0.50E+06 KHZ) = 107.359 KM

DELTZ = 0.200 KM, NSLAB = 247

VII


C_0 →
0,2 0,4 0,6 0,8 1,0
2Ch
Exp
f = 2 kHz
4 kHz
8 kHz
16 kHz
180°
135°
90°
45°
0°
-45°
-90°
-135°
±180°
VIII



II

Nomenklatur

Raum- und Zeitkoordinaten

s	Raumkoordinate, allgemein
$\overset{2}{s}$	Fläche
t	Zeit
x,y,z	kartesische Raumkoordinaten: z-Achse senkrecht zur Erdoberfläche, (z,x)-Ebene enthält Ausbreitungsrichtung
$\Theta, \emptyset, r$	Kugelkoordinaten: r = Abstand von Nullpunkt, Θ = Neigungswinkel gegen Polachse (= z-Achse)
$\varphi_{geo}, \lambda_{geo}$	Geographische Breite und Länge
$\varphi_{magn}, \lambda_{magn}$	Geomagnetische Breite und Länge

Komplexe Zahlen, Vektoren, Spalten und Zeilen

Komplexe Zahlen werden entweder durch Unterstreichung oder durch hochgestellten Index ^{c} kenntlich gemacht, sofern es vom Zusammenhang her erforderlich ist:

$$\left.\begin{matrix} a^c \\ \underline{a} \end{matrix}\right\} = a^{re} + j\, a^{im} = |a| \exp(j\,\varphi_a)$$

j	imaginäre Einheit
a^{re}, a^{im}	Realteil, Imaginärteil
$\lvert a\rvert, \varphi_a$	Betrag, Phase

Vektoren werden durch darübergesetzte Pfeile, Spalten durch Fett"druck", Zeilen durch hochgestellten Index T kenntlich gemacht:

$\vec{r} = \mathbf{1}_x x + \mathbf{1}_y y + \mathbf{1}_z z$	= Komponentendarstellung des Ortsvektors im (x,y,z)-System
$\vec{F} = \mathbf{1}_x F_x + \mathbf{1}_y F_y + \mathbf{1}_z F_z$	= Komponentendarstellung des Vektors $\vec{F}$ im (x,y,z)-System
$\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$	Einheitsvektoren des (x,y,z)-Systems
$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$	= Spalte } aus den Vektorkoordinaten des Vektors $\vec{F}$
$\mathbf{F}^T = (F_x, F_y, F_z)$	= Zeile } aus den Vektorkoordinaten des Vektors $\vec{F}$
$\lvert\vec{F}\rvert = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = F$	= Betrag des Vektors $\vec{F}$
$\mathbf{1}_i = \mathbf{1}_x c_{ix} + \mathbf{1}_y c_{iy} + \mathbf{1}_z c_{iz}$	= Komponentendarstellung eines beliebig gerichteten Einheitsvektors $\mathbf{1}_i$ im (x,y,z)-System
c_{ik} = Richtungscosinus	= Cosinus des Winkels zwischen zwei Richtungen i und k, im allgemeineren Sinne: Element einer Transformationsmatrix
$\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i^T$	= Spalte bzw. Zeile aus Richtungscosinus c_{ik}
$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$	= inneres Produkt
$\vec{F}_1 \times \vec{F}_2$	= äußeres Produkt
$\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2^T$	= dyadisches Produkt

Physikalische Konstanten

$c = 300$ km·kHz	= Vakuum-Lichtgeschwindigkeit
$\epsilon_o = 10^{-9}$ A sec/(36 π V m)	= Dielektrizitätskonstante des Vakuums (= $\frac{1}{4\pi}$ im cgs-System)
$\mu_o = 4\pi\, 10^{-7}$ V sec/(A m)	= Induktionskonstante des Vakuums (= $\frac{1}{4\pi}$ im cgs-System)
$\chi_o = c\sqrt{\epsilon_o/\mu_o} = 1$	= Maßsystemkonstante (= $\frac{c}{4\pi}$ im cgs-System)
$Z_o = \sqrt{\mu_o/\epsilon_o} = 120\,\pi\,\Omega$	= Wellenwiderstand des Vakuums (= 1 im cgs-System)

g_{grav}	$= 9{,}8\ m/sec^2$	= Erdbeschleunigung
h_{PL}	$= 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ Watt \cdot sec^2$	= Planck'sche Konstante
k_{BO}	$= 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{Wattsec}{Grad}$	= Boltzmann'sche Konstante
m_{el}	$= 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$	= Ruhmasse des Elektrons
q_{el}	$= -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Asec$	= Ladung des Elektrons
R_{gas}	$= 8{,}137\ \frac{Wattsec}{Mol \cdot Grad}$	= Allgemeine Gaskonstante

Vektoren und Vektorfelder

$\vec{B}$	magnetische Kraftflußdichte
$\vec{D}$	elektrische Verschiebungsdichte
$\vec{E}$	Elektrische Feldstärke
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke
$\vec{H}_{terr}$	Erdmagnetfeld
$\vec{J}_q$	elektrische Ladungs-Stromdichte
$\vec{J}_W$	Energie-Stromdichte
$\vec{P}_\epsilon$	elektrischer Elementar-Dipol
$\vec{P}_{\mu terr}$	fiktiver magnetischer Elementardipol im Erdinnern (= Quelle von H_{terr})
$\vec{P}_\epsilon$	dielektrische Polarisationsdichte
$\vec{P}_\mu$	magnetische Polarisationsdichte

Physikalische Beschreibung des Ausbreitungsmediums

a) Allgemein

$\epsilon,\ \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_o}$	Dielektrizitätskonstante bzw. relative Dielektrizitätskonstante
$\mu, \mu_r = \frac{\mu}{\mu_o}$	Induktionskonstante bzw. relative Induktionskonstante
σ_q	elektrische Leitfähigkeit
τ_{rel}	Relaxationszeit

b) speziell Ionosphäre

H_s	Skalenhöhe
$H_{s\nu}$	Skalenhöhe des stoßfrequenz-Profils
$J_{W\infty}^{(ion)}$	Intensität der einfallenden, ionisierenden Strahlung oberhalb der Ionosphäre
N_{el}	Dichte freier Elektronen
N_{ion}	Dichte ionisierter Luftmoleküle
N_{mol}	Dichte neutraler Luftmoleküle
N_m	Elektronendichte in der Höhe (z_m, s.u.) des Ionisationsdichte-Maximums
$Q_{el}^{(+)}$	Zahl der pro Zeit- und Raumeinheit durch Ionisationsprozesse erzeugten freien Elektronen (Elektronen-Produktionsrate)
Q_m	Maximale Elektronen-Produktionsrate innerhalb einer Chapman-Schicht
$\hat{S}_{abs}$	Absorptionsquerschnitt der Luftmoleküle gegenüber ionisierender Strahlung
$\hat{S}_{coll}$	Kollisionsquerschnitt der neutralen Luftmoleküle gegenüber freien Elektronen
T_{abs}	absolute Temperatur
z_m	Höhe der maximalen Elektronenproduktionsrate in einer Chapmanschicht

α_{rec} Rekombinationskoeffizient

α_{att} Anlagerungskoeffizient

χ Neigungswinkel der ionisierenden Strahlung gegen Zenit

ω_N^2 Quadrat der Plasmafrequenz ($= q_{el}^2 N_{el}/(\epsilon_o m_{el})$)

$\vec{\omega}_H$ Gyrofrequenzvektor ($= \mu_o q_{el} \vec{H}_{terr}/m_{el}$)

Kenngrößen ebener, inhomogener Wellen

f, $\omega = 2\pi f$ Frequenz, Kreisfrequenz

λ, λ_o Wellenlänge, Vakuumwellenlänge

v_{ph} Phasengeschwindigkeit

s_{at} Dämpfungskonstante (= Strecke, längs derer die Wellenamplitude um den Faktor 1/e abnimmt)

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_{ph}}$ Wellenzahl

$k_o = \frac{2\pi}{\lambda_o} = \frac{\omega}{c}$ Vakuumwellenzahl

$n^c = n^{re} + j\, n^{im}$ = komplexer Brechungsindex (bzw. komplexe Brechzahl)

$1_\Phi = 1_x S + 1_z C = \vec{1}_\Phi^{re} + j\, \vec{1}_\Phi^{im}$ = Wellennormalvektor, wobei $S = \sin(\Theta_\Phi)$, $C = \cos(\Theta_\Phi)$, Θ_Φ = Neigungswinkel des Wellennormalvektors gegen z-Achse

$\vec{\mathfrak{k}} = 1_x \underline{k}_x + 1_z \underline{k}_z = 1_{ph} \frac{2\pi}{\lambda} + j\, 1_{at} \frac{1}{s_{at}} = k_o n^c 1_\Phi$ = komplexer Wellenvektor, wobei

1_{ph} = Einheitsvektor senkrecht zu Ebenen konstanter Phase,

1_{at} = Einheitsvektor senkrecht zu Ebenen konstanter Amplitude

$\underline{k} = |\vec{\mathfrak{k}}| = k_o n^c$ = komplexe Wellenzahl

Frequenzabhängige Parameter für die Berechnung des komplexen Wellenvektors

a) Allgemein

$\epsilon_r^c = \epsilon_r^{re} - j \frac{\sigma_q}{\epsilon_o \omega}$ = komplexe (relative) Dielektrizitätskonstante ($= (n^c)^2$ im isotropen Medium)

$\sigma_q^c = \sigma_q^{re} + j\, \epsilon_r \epsilon_o \omega$ = komplexe Leitfähigkeit

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix}$$ = Matrix des Suszeptibilitätstensors

$\underline{\underline{\epsilon}}_r = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{M}}$ = Matrix des Tensors der relativen DK ($\underline{\underline{I}}$ = Einheitsmatrix)

b) speziell Ionosphäre

$X = \frac{\omega_N^2}{\omega^2}$ = normiertes Plasmafrequenz-Quadrat

$\vec{Y} = \frac{\vec{\omega}_H}{\omega}$ = normierter Gyrofrequenz-Vektor

$Y_\Phi = 1_\Phi \cdot \vec{Y}$ = Komponente des normierten Gyrofrequenzvektors parallel zu 1_Φ

$Y_= = \sqrt{\vec{Y} \cdot \vec{Y} - Y_\Phi^2}$ = Komponente des normierten Gyrofrequenzvektors senkrecht zu 1_Φ und parallel zur Bezugsebene

$Z = \frac{\nu_c}{\omega}$ = normierte Stoßfrequenz = Reibungsparameter in der Bewegungsgleichung des Elektrons

$U = 1 - j\, Z$ = Hilfsgröße ($U \rightarrow 1$, wenn $\nu_c \rightarrow 0$)

Einheitsvektoren welleneigener Koordinatensysteme

a) isotrop

$1_\parallel, 1_\perp, 1_\Phi$ = Welleneigenes Einheitsvektor-System, definiert durch 1_Φ und

1_z = Senkrechte zur Erdoberfläche

$$1_\perp = \frac{1_z \times 1_\Phi}{\sqrt{1 - (1_z \cdot 1_\Phi)^2}}$$ = Einheitsvektor senkrecht zur Ausbreitungsebene

$$1_\parallel = 1_\perp \times 1_\Phi$$ = Einheitsvektor parallel zur Ausbreitungsebene und senkrecht zu 1_Φ

b) anisotrop

$1_=, 1_\dashv, 1_\Phi$ = Welleneigenes Einheitsvektor-System, definiert durch 1_Φ und

$$1_Y = \frac{\vec{Y}}{|\vec{Y}|}$$ = Einheitsvektor in Richtung des normierten Gyrofrequenzvektors

$$1_\dashv = \frac{1_\Phi \times 1_Y}{\sqrt{1 - (1_\Phi \cdot 1_Y)^2}}$$ = Einheitsvektor senkrecht zur Bezugsebene aus 1_Φ und 1_Y

$$1_= = 1_\dashv \times 1_\Phi$$ = Einheitsvektor parallel zur Bezugsebene und senkrecht zu 1_Φ

$1_\circlearrowright = 1_= \cos(\omega t) + 1_\dashv \sin(\omega t)$ = Rechtsdrehender E.V.

$1_\circlearrowleft = 1_= \cos(\omega t) - 1_\dashv \sin(\omega t)$ = Linksdrehender E.V.

Darstellung im (x,y,z)-System: $C = \cos(\Theta_\Phi)$, $S = \sin(\Theta_\Phi)$, Θ_Φ = Winkel zwischen 1_Φ und 1_z

$$1_\parallel = 1_x C - 1_z S$$
$$1_\perp = 1_y$$
$$1_\Phi = 1_x S + 1_z C$$

$$1_= = 1_x c_{=x} + 1_y c_{=y} + 1_z c_{=z}$$
$$1_\dashv = 1_x c_{\dashv x} + 1_y c_{\dashv y} + 1_z c_{\dashv z}$$
$$1_\Phi = 1_x S + 1_z C$$

Darstellung ebener Wellen in welleneigenen Koordinatensystemen

Allgemeine Form der komplexen Ausbreitungsfunktion: $u_{pr}(\vec{r},t) = \exp(j(\omega t - k_o n^c (1_\Phi \cdot \vec{r}))$

a) isotrop

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (1_\parallel E_\parallel + 1_\perp E_\perp)\, u_{pr}$$
$$Z_o \vec{H}(\vec{r},t) = (1_\parallel Z_o H_\parallel + 1_\perp Z_o H_\perp)\, u_{pr}$$

Wellentypen:

tm ≙ transversal magnetisch

te ≙ transversal elektrisch

$n^c = \sqrt{\mu_r \epsilon_r^c} = \sqrt{1 - \frac{X}{U}}$

= Brechungsindex, für beide Wellentypen gleich

$$P_E = \frac{E_\perp}{E_\parallel} = -\frac{Z_o H_\parallel}{Z_o H_\perp}$$

= Wellenpolarisation, beliebige Werte sind mit Grundgleichungen verträglich

Charakteristische Amplituden:

$Z_o H_{tm} = Z_o H_\perp \cdot u_{pr}$, $E_{te} = E_\perp \cdot u_{pr}$

b) anisotrop

$$\vec{E}(r,t) = (1_= E_= + 1_\dashv E_\dashv + 1_\Phi E_\Phi)\, u_{pr}$$
$$Z_o \vec{H}(r,t) = (1_= Z_o H_= + 1_\dashv Z_o H_\dashv)\, u_{pr}$$

Wellentypen:

ord ≙ ordentliche Welle

ex ≙ außerordentliche Welle

$n^c = \sqrt{1 - \frac{X}{U - \varkappa}}$ = Brechungsindex,

$\varkappa$ = Hilfsgröße = Lösung von

$$\varkappa^2 - \frac{Y_=^2}{U - X}\varkappa - Y_\Phi^2 = 0 ,$$

ordentliche Welle: negative Wurzel
außerordentliche Welle: positive Wurzel

$$P_\dashv = \frac{E_\dashv}{E_=} = -\frac{Z_o H_=}{Z_o H_\dashv} = -\frac{1}{jY_\Phi}\varkappa$$

= Wellenpolarisation in Ebene senkrecht zu 1_Φ, Werte durch $Y_=$ und Y_Φ festgelegt.

$P_{\Phi\dashv} = \frac{E_\Phi}{E_\dashv}$, speziell: $P_{\Phi ex} = \frac{E_{\Phi ex}}{E_{\dashv ex}}$

$P_{\Phi=} = \frac{E_\Phi}{E_=}$, speziell: $P_{\Phi ord} = \frac{E_{\Phi ord}}{E_{= ord}}$

Charakteristische Amplituden:

$Z_o H_{ord} = Z_o H_{\dashv ord} u_{pr,ord}$, $E_{ex} = E_{\dashv ex} u_{pr,ex}$

Darstellung der Welle durch Z_oH_{tm}:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (1_{\parallel} + 1_{\perp}P_E)\,\frac{n^c}{\varepsilon_r^c}\,Z_oH_{tm}$$

$$Z_o\vec{H}(\vec{r},t) = (-1_{\parallel}P_E + 1_{\perp})\,Z_oH_{tm}$$

Darstellung der Welle durch E_{te}

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (1_{\parallel}\,\frac{1}{P_E} + 1_{\perp})\,E_{te}$$

$$Z_o\vec{H}(\vec{r},t) = (-1_{\parallel} + 1_{\perp}\,\frac{1}{P_E})\,\frac{\varepsilon_r^c}{n^c}\,E_{te}$$

Darstellung der ordentlichen Welle durch Z_oH_{ord}:

$$\vec{E}_{ord}(\vec{r},t) = (1_{=} + 1_{\dashv}P_{\dashv ord} + 1_{\Phi}P_{\Phi ord})\,\frac{1}{n^c_{ord}}\,Z_oH_{ord}$$

$$Z_o\vec{H}_{ord}(\vec{r},t) = (-1_{=}P_{\dashv ord} + 1_{\dashv})\,Z_oH_{ord}$$

Darstellung der außerordentlichen Welle durch E_{ex}:

$$\vec{E}_{ex}(\vec{r},t) = (1_{=}\,\frac{1}{P_{\dashv ex}} + 1_{\dashv} + 1_{\Phi}P_{\Phi ex})\,E_{ex}$$

$$Z_o\vec{H}_{ex}(\vec{r},t) = (-1_{=} + 1_{\dashv}\,\frac{1}{P_{\dashv ex}})\,n^c_{ex}\,E_{ex}$$

Übergang von charakteristischen Amplituden zu horizontalen Vektorkoordinaten:

Allgemeine Form: $\underline{\mathbf{F}_x = \underline{\underline{C}}_x \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}\ ,\ \mathbf{F}_y = \underline{\underline{C}}_y \cdot \mathbf{F}^{\uparrow}}$, wobei $\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} E_x \\ Z_oH_x \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} Z_oH_y \\ -E_y \end{pmatrix}$ und

a) isotrop

$$\mathbf{F}^{\uparrow} = \begin{pmatrix} Z_oH_{tm} \\ E_{te} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}_x = \begin{pmatrix} \frac{n^c C}{\varepsilon_r^c} & 0 \\ 0 & \frac{n^c C}{\mu_r} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) anisotrop

$$\mathbf{F}^{\uparrow} = \begin{pmatrix} Z_oH_{ord} \\ E_{ex} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^c_{ord}}(C_{ord}\Gamma^{tm}_{ord} + S_{ord}P_{\Phi ord}) & (C_{ex}\Gamma^{tm}_{ex} + S_{ex}P_{\Phi ex}) \\ C_{ord}\Gamma^{te}_{ord} & C_{ex}\Gamma^{te}_{ex}\cdot n^c_{ex} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}_y = \begin{pmatrix} \Gamma^{tm}_{ord} & \Gamma^{tm}_{ex}\cdot n^c_{ex} \\ \frac{1}{n^c_{ord}}\Gamma^{te}_{ord} & \Gamma^{te}_{ex} \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$$\Gamma^{tm}_{ord} = (c_{\dashv y} - c_{=y}P_{\dashv})_{ord}\ ,\quad \Gamma^{tm}_{ex} = (\frac{c_{\dashv y}}{P_{\dashv}} - c_{=y})_{ex}$$

$$\Gamma^{te}_{ord} = (-c_{\dashv y}P_{\dashv} - c_{=y})_{ord},\quad \Gamma^{te}_{ex} = (-c_{\dashv y} - \frac{c_{=y}}{P_{\dashv}})_{ex}$$

Darstellung von Wellenpaaren

Erklärung des Wellenpaares durch

$\underline{k}_x = k_o n^c S = k_o S_o$ = gemeinsame x-Koordinate der Wellenvektoren eines Wellenpaares

$S_o = \sin(\Theta_{\uparrow o})$, $\Theta_{\uparrow o}$ = reeller Neigungswinkel des Wellennormalvektors der einfallenden (= aufsteigenden) Welle unterhalb der Ionosphäre gegen z-Achse

$\varphi_x = (\omega t - \underline{k}_x x)$ = Phase der Ausbreitungsfunktion in x-Richtung

Differentialgleichung des Wellenpaares:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{F} = -jk_o \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \mathbf{F}$$

a) isotrop

$\mathbf{F}$ = Zweier-Spalte aus den horizontalen Vektorkoordinaten des tm- bzw. te-Wellenpaares

$$= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} E_x \\ Z_o H_y \end{pmatrix} & \text{für tm-Welle} \\ \begin{pmatrix} Z_o H_x \\ -E_y \end{pmatrix} & \text{für te-Welle} \end{cases}$$

$\underline{\underline{\mathcal{K}}}$ = 2 X 2 - Kopplungsmatrix

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{xx} & \mathcal{K}_{xy} \\ \mathcal{K}_{yx} & \mathcal{K}_{yy} \end{pmatrix} \quad (\mathcal{K}_{xx} = \mathcal{K}_{yy} = 0)$$

b) anisotrop

$\mathbf{F}$ = Vierer-Spalte aus den horizontalen Vektorkoordinaten des aus einem ordentlichen und einem außerordentlichen Wellenpaar zusammengesetzten Feldes

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ Z_o H_x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Z_o H_y \\ -E_y \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\mathcal{K}}}$ = 4 X 4 - Kopplungsmatrix

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{11} & 0 \\ \mathcal{K}_{21} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{13} & \mathcal{K}_{14} \\ \mathcal{K}_{23} & \mathcal{K}_{24} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{31} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{33} & \mathcal{K}_{34} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathcal{K}}}_{xx} & \underline{\underline{\mathcal{K}}}_{xy} \\ \underline{\underline{\mathcal{K}}}_{yx} & \underline{\underline{\mathcal{K}}}_{yy} \end{pmatrix}$$

Darstellung der Verhältnisse zwischen den horizontalen Vektorkoordinaten:

a) isotrop

$L = \frac{F_y}{F_x}$ = Horizontalkomponenten-Verhältnis

$L_{tm} = \frac{Z_o H_y}{E_x}$ = normierte Admittanz

$L_{te} = \frac{-E_y}{Z_o H_x}$ = normierte Impedanz

b) anisotrop

$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} L_{tm}^{tm} & L_{te}^{tm} \\ L_{tm}^{te} & L_{te}^{te} \end{pmatrix}$ = Matrix der Horizontal-Komponenten-Verhältnisse, definiert durch

$$\mathbf{F}_y = \underline{\underline{L}} \cdot \mathbf{F}_x$$

Auf Diagonalform transformierte Differentialgleichung des Wellenpaares:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{F}_{tr} = -jk_o\underline{\underline{Q}}\cdot\mathbf{F}_{tr}\ ,\ \text{wobei}\ \mathbf{F} = \underline{\underline{C}}\cdot\mathbf{F}_{tr}$$

a) isotrop

$\mathbf{F}_{tr}$ = Zweier-Spalte aus den charakteristischen Amplituden der auf- und absteigenden Welle eines tm- bzw. te-Wellenpaares

$$= \begin{pmatrix} F^{\uparrow} \\ F^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} Z_oH^{\uparrow}_{tm} \\ Z_oH^{\downarrow}_{tm} \end{pmatrix} & \text{für tm-Welle} \\ \begin{pmatrix} E^{\uparrow}_{te} \\ E^{\downarrow}_{te} \end{pmatrix} & \text{für te-Welle} \end{cases}$$

$\underline{\underline{Q}}$ = 2 X 2 - Diagonalmatrix mit den Eigenwerten der Kopplungsmatrix

$$= \begin{pmatrix} q^{\uparrow} & 0 \\ 0 & q^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^c & 0 \\ 0 & -q^c \end{pmatrix}$$

$$q^c = \frac{1}{k_o}\sqrt{\underline{k}^2 - \underline{k}_x^2} = \sqrt{C_o^2 - \frac{X}{U}}$$

$\underline{\underline{C}}$ = 2 X 2 - Transformationsmatrix

$$= \begin{pmatrix} c^{\uparrow}_x & c^{\downarrow}_x \\ c^{\uparrow}_y & c^{\downarrow}_y \end{pmatrix}$$

$$c^{\uparrow}_x = -c^{\downarrow}_x = \frac{q^c}{\varepsilon^c_r}\ \text{für tm-Wellen}$$

$$\text{bzw.}\ = \frac{q^c}{\mu_r}\ \text{für te-Wellen}$$

$$c^{\uparrow}_y = c^{\downarrow}_y = 1\ \text{für beide Wellentypen}$$

b) anisotrop

$\mathbf{F}_{tr}$ = Vierer-Spalte aus den charakteristischen Amplituden der auf- und absteigenden Wellen des ordentlichen und des außerordentlichen Wellenpaares

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\uparrow} \\ \mathbf{F}^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_oH^{\uparrow}_{ord} \\ E^{\uparrow}_{ex} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Z_oH^{\downarrow}_{ord} \\ E^{\downarrow}_{ex} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{Q}}$ = 4 X 4 - Diagonalmatrix mit den Eigenwerten der Kopplungsmatrix

$$= \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{\uparrow}_{ord} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{\uparrow}_{ex} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{\downarrow}_{ord} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{\downarrow}_{ex} \end{pmatrix}$$

q_j = Lösungen der Booker-Quartic ($j = 1 \ldots 4$)

$\underline{\underline{C}}$ = 4 X 4 - Transformationsmatrix

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{13} & c_{14} \\ c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_x & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_x \\ \underline{\underline{C}}^{\uparrow}_y & \underline{\underline{C}}^{\downarrow}_y \end{pmatrix}$$

$$c_{1j} = p_{Ej} = \left(\frac{E_x}{E_y}\right)_j\ ,\quad c_{2j} = q_j\ ,$$

$$c_{3j} = p_{Hj}\cdot q_j\ ,\quad p_{Hj} = \left(\frac{Z_oH_y}{Z_oH_x}\right)_j\ ,\quad c_{4j} = 1$$

$$(j = 1 \ldots 4)$$

Darstellung der Verhältnisse zwischen den charakteristischen Amplituden

a) isotrop

$$R = \frac{F^{\downarrow}}{F^{\uparrow}}$$ = Reflexionskoeffizient (bzw. Reflexionsfaktor)

$$R_{tm} = \frac{Z_oH^{\downarrow}_{tm}}{Z_oH^{\uparrow}_{tm}}\ ,\quad R_{te} = \frac{E^{\downarrow}_{te}}{E^{\uparrow}_{te}}$$

b) anisotrop

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} R^{tm}_{tm} & R^{tm}_{te} \\ R^{te}_{tm} & R^{te}_{te} \end{pmatrix}$$ = Reflexionsmatrix, definiert durch

$$\mathbf{F}^{\downarrow} = \underline{\underline{R}}\cdot\mathbf{F}^{\uparrow}$$

Schrifttum

Barber, N.F. and Crombie, D.D	1959	V.L.F. reflections from the ionosphere in the presence of a transverse Magnetic field J. Atm. Terr. Phys. 16, 37 - 45
Born,M.	1932	Optik - Ein Lehrbuch der Elektromagnetischen Lichttheorie Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York
Bremmer, H.	1949	Terrestrial Radio Waves Elsevier Publishing Company Amsterdam - New York 1949
Budden, K.G.	1951	The reflection of very low frequency radio waves at the curface of a charply bounded ionosphere with superimposed magnetic field Phil. Mag. 42, 833 - 850
Budden, K.G.	1961	Radio Waves in the Ionosphere Cambridge University Press, Cambridge
Budden, K.G.	1962	The Wave Guide Mode Theory of Wave Propagation Logos Press Ltd - Academic Press Inc. Ltd, London
Clemmow, P.C.	1966	The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields International Series of Monographs in Electromagnetic Waves, Vol. 12 Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, New York, Toronto, Sydney, Paris, Braunschweig
Dahms, P.	1958	Kreisdiagramme und ihre Gewinnung durch konforme Abbildung Radio und Fernsehen 2 49 - 52
Davies , K.	1969	Ionospheric Radio Waves Blaisdell Publishing Company Waltham, Mass., Toronto, London, 1969
Field, E.C., and Tamarkin , P.	1961	VLF Ionospheric Reflection Coefficient-Derivation from Impedance Concepts ands Values for Some Model Ionospheres J. Geophys. Res. 66 No. 9 , 2737 - 2750
Frisius, J. Heydt, G. und Raupach, R.	1971	Messung des vollständigen elektromagnetischen Feldes von Längstwellensendern Techn. Bericht Nr. 145 des Heinrich-Hertz-Instituts für Schwingungsforschung Berlin - Charlottenburg
Frisius, J.	1973	Vektorrechnung - kurz und bündig Vogel - Verlag, Würzburg,
Frisius, J.	1974	Bemerkungen zur aeronomischen Interpretation von VLF-Registrierungen Kleinheubacher Berichte 17
Harth, W.	1970	Die Berechnung der Atmosphericsparameter im unteren VLF-Bereich mit Hilfe des Wait-Formalismus Dissertation Bonn

Harth, W.	1972	Die Beschreibung von VLF - Atmospherics-Parametern mit dem Wait- und-Walters - Modell Z. Geophys. 38
Harth, W.	1972	VLF-Atmospherics - Ihre Messung und ihre Interpretation Zeitschr. f. Geophysik 38 815 - 849
Heydt, G., Frisius, J. Volland, H. und Harth, W.	1967	Beobachtung entfernter Gewitterzentren mit dem Atmosphericsanalysator des Heinrich-Hertz-Instituts Kleinheubacher Berichte 12, 103 - 110
Heydt, G.	1974	Beobachtung der Gewitteraktivität im Bereich geringer Entfernungen durch Verfahren der VLF - Radiometeorologie Kleinheubacher Berichte 17
Hund, F.	1957	Theoretische Physik, Bd. II, Theorie der Elektrizität und des Lichts Teubner - Verlagsgesellschaft, Stuttgart, (3. Aufl.)
Kertz, W.	1969	Einführung in die Geophysik, Bd. I B.I. Hochschultaschenbücher 275/275 a Bibliographisches Institut, Mannheim
Kertz, W.	1971	Einführung in die Geophysik, Bd. II B.I. Hochschultaschenbücher 535 Bibliographisches Institut, Mannheim
Lange Hesse, G.	1952	Vergleich der Doppelbrechung im Kristall und in der Ionosphäre Arch. Elek. Übertr. 6, 149
Meinke, H. und Gundlach, F.W.	1968	Taschenbuch der Hochfrequenztechnik Springer - Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
Nicolet, M.	1953	The collision frequency of electrons in the ionosphere Journ. of Atmos. and Terrestrial Phys., (Vol) 3, 200 - 211
Nicolett, M. and Aikin, A.C.	1960	The Formation of the D-Region of the Ionosphere J. Geophys. Res. 65 No. 5, 1469 - 1483
Pohl, R.W.	1948	Einführung in die Optik Springer - Verlag Berlin - Göttingen - Heidelberg, (8. Auflage)
Ratcliffe, J.A.	1959	The Magnetoionic Theory and its Application to the Ionosphere Cambridge University Press, Cambridge
Rawer, K.	1953	The Ionosphere - Its Significance for Geophysics and Radio Communications Crosby Lockwood & Son Ltd, London
Ries, G.	1964	Untersuchung von Polarisationsfehlern bei der Längstwellenpeilung Dissertation Aachen

Sommerfeld, A. 1947 Partielle Differentialgleichungen der Physik
Vorlesungen über Theoretische Physik, Bd. VI
Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden, (2. Aufl.)

Stratmann, D. 1970 Berechnung des Wellenfeldes eines Längstwellensenders im Entfernungsbereich bis 1000 km zur kontinuierlichen Sondierung der tiefen Ionosphäre durch Feldstärkemessungen in geeigneten Entfernungen vom Sender
Mitteilung aus dem Max-Planck-Institut für Aeronomie Nr. 41,
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New - York

Stratton, J.A. 1941 Electromagnetic Theory
McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, London

Volland, H. 1961 Lösungen der ionosphärischen Bilanzgleichungen im Falle einer Sonneneruption
Techn. Bericht Nr. 49 des Heinrich-Hertz-Instituts für Schwingungsforschung
Berlin - Charlottenburg

Volland, H. 1962 The propagation of plane electromagnetic waves in a horizontally stratified ionosphere
J. Atm. Phys. 24, 853 - 857

Volland, H. 1962 Die Streumatrix der Ionosphäre
Arch. Elek. Übertr. 16, 328 - 334

Volland, H. 1963 Die Reflexion sehr langer elektromagnetischer Wellen am anisotropen inhomogenen Ionosphären-Plasma
Techn. Bericht Nr. 67 des Heinrich-Hertz-Instituts für Schwingungsforschung
Berlin - Charlottenburg

Volland, H. 1963 Ein Beitrag zur Lösung der Ionosphärischen Bilanzgleichungen
Arch. Elek. Übertr. 17, 479 - 483

Volland, H. 1964 Diurnal Phase Variation of VLF Waves at Medium Distances
Radio Science 68 D No. 2, 225 - 238

Volland, H. 1964 Zur Theorie der Ausbreitung langer elektromagnetischer Wellen, Teil I und II
Arch. Elek. Übertr. 18 95 - 104 und 181 - 188

Volland, H. 1964 On the solar flare effect of v.l.f.-waves in the lower ionosphere
J. Atm. Terr. Phys. 26, 695 - 709

Volland, H. 1968 Die Ausbreitung langer Wellen
F. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Wait, J.R. 1962 Electromagnetic Waves in Stratified Media
International Series of Monographs on Electromagnetic Waves, Vol. 3
Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Braunschweig

Wait, J.R. 1968 Electromagnetics and Plasmas
Holt, Rinehart and Winston, New York

Wait, J.R. and Perry, L.B.	1957	Calculations of Ionospheric Reflection Coefficients at Very Low Radio Frequencies J. Geophys. Res. 62, No. 1, 43 - 56
Wait, J.R., and Spies, K.	1960	Influence of Earth Curvature and the Terrestrial Magnetic Field on VLF Propagation J. Geophys. Res. 65 No. 8, 2325 - 2331
Wait, J.R., and K.P. Spies	1964	Characteristics of the earth - ionosphere wave guide for VLF radio waves Technical Note, No. 300, N.B.S. Boulder, Colorado
Wait, J.R., and Walters, L.C.	1963	Reflection of VLF Radio Waves from an Inhomogeneous Ionosphere Pt. I : J. Res. NBS 67D No. 3, 361 - 367 Pt.II : J. Res. NBS 67D No. 5, 519 - 523 Pt.III : J. Res. NBS 67D No. 6, 747 - 752
Yabroff, I.W.	1957	Reflection at a charply - bounded Ionosphere Proc. IRE 45 750 - 753